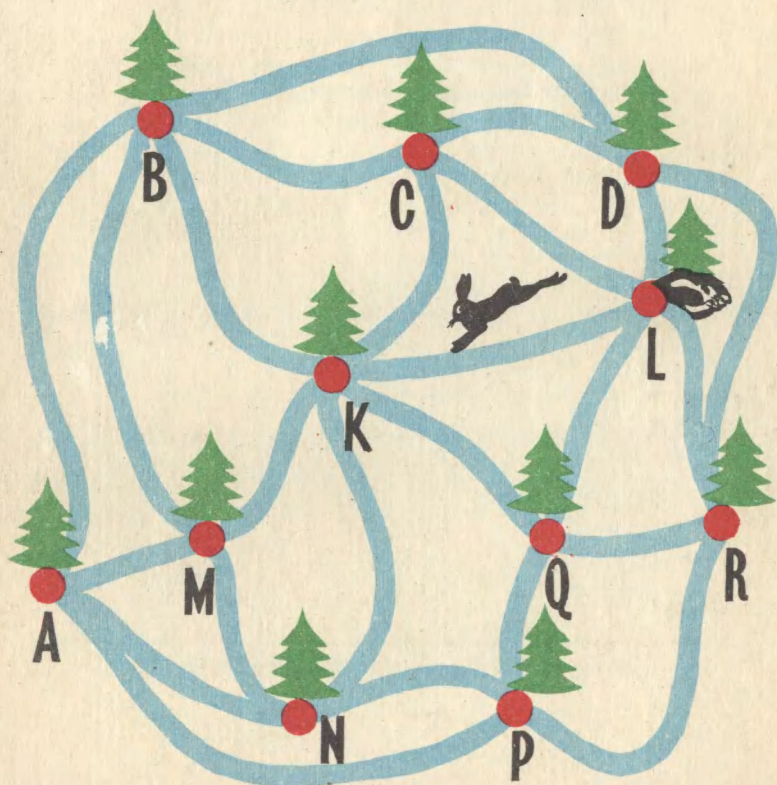


МИР знаний

А.А. САРКИСЯН, Ю.М. КОЛЯГИН

Познакомьтесь с топологией



А. А. САРКИСЯН, Ю. М. КОЛЯГИН

Познакомьтесь с топологией

(НА ПОДСТУПАХ К ТОПОЛОГИИ)

*Книга для внеклассного чтения
VIII—X классы*

- Саркисян А. А. и Колягин Ю. М.**
С 20 Познакомьтесь с топологией (на подступах к топологии). Книга для внеклассного чтения. VIII—X классы. М., «Просвещение», 1976.

79 с. с ил. (Мир знаний).

В книге рассмотрены вопросы и занимательные задачи, примыкающие к топологии (задачи об универсальных фигурах, узлах, лабиринтах) и некоторые простейшие вопросы теории графов, раскраски карты и т. д.

С $\frac{60601-710}{103 \text{ (03)}-76}$ 268-76

517.6

Ответить на вопрос о том, что такое топология, весьма не просто. Для того чтобы в полной мере оценить задачи, которые решаются этой научной дисциплиной, необходимо серьезное изучение многих весьма сложных вопросов математики. В этой небольшой книге мы не будем ставить себе целью получить сколько-нибудь полный ответ на этот вопрос. Главное, что мы попытаемся сделать — это рассмотреть некоторые примыкающие к топологии математические факты и показать, что многие из них могут быть использованы при решении интересных задач, известных под названием «занимательных».

Именно с рассмотрения таких задач мы и начнем. Будем надеяться, что после прочтения этой книги у вас возникнет желание заняться изучением топологии всерьез и надолго.

1. УНИКУРСАЛЬНЫЕ ФИГУРЫ

К XVIII в. через реку Прегель, протекавшую по городу Кенигсберг (Калининград), было построено 7 мостов, которые связывали ее берега с двумя островами, расположенными в черте города (рис. 1).

Рассказывают, что однажды один из жителей города спросил у своего соседа, сможет ли он пройти по всем мостам так, чтобы на каждом из них побывать лишь один раз и вернуться к тому месту, откуда начал прогулку.

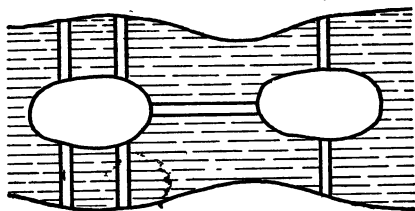


Рис. 1

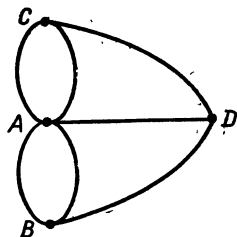


Рис. 2

Этой задачей заинтересовались многие, однако решить ее никто из жителей города так и не смог.

В дальнейшем задача привлекла внимание ученых разных стран. Решить ее удалось в 1736 г. известному швейцарскому математику Л. Эйлеру, который в то время работал в Петербурге и не приезжал в Кенигсберг. При этом Л. Эйлер не только решил эту задачу, но и сумел найти общий метод решения аналогичных задач.

Решая задачу о семи мостах, Эйлер поступил следующим образом. Он изобразил точками B и C берега реки, точками A и D острова, а линиями — мосты, соединяющие соответствующие участки берегов и островов. В результате получилась фигура, приведенная на рисунке 2.

Такую фигуру называют *графом*, точки, A, B, C, D называют *вершинами* графа, а отрезки кривых, соединяющие вершины, — *дугами* (*ребрами*) графа.

Эйлер подсчитал число дуг, исходящих из каждой вершины графа (рис. 2). Из вершин B, C и D исходит по три дуги, а из вершины A — пять дуг. Вершины графа, из которых исходит нечетное число дуг, он назвал *нечетными* вершинами, а вершины, из которых исходит четное число дуг, — *четными*. Все вершины данного графа оказались нечетными.

В ходе решения этой задачи Эйлер установил следующие четыре свойства графа¹:

1. Число нечетных вершин графа всегда четно. Невозможно начертить граф, который имел бы нечетное число нечетных вершин.

2. Если все вершины графа четные, то можно одним росчерком (т. е. без отрыва карандаша от бумаги, проводя

¹ Точнее — связного графа (см. п. 5).

по каждой дуге только один раз) начертить граф, при этом движение можно начать с любой вершины и закончить его в той же вершине.

3. Граф только с двумя нечетными вершинами можно начертить одним росчерком, при этом движение нужно начать с одной из этих нечетных вершин и закончить в другой.

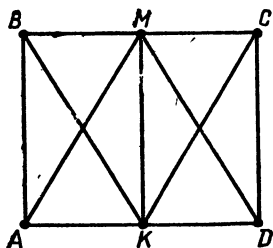


Рис. 3

4. Граф с более чем двумя нечетными вершинами невозможно начертить одним росчерком.

Поскольку число нечетных вершин графа, соответствующего задаче о семи мостах, оказалось равным четырем, то такой граф нельзя изобразить одним росчерком, а следовательно, невозможно пройти по всем семи мостам, побывав на каждом из них по одному разу, и вернуться в начало пути.

Рассмотрим теперь еще одну задачу, аналогичную задаче семи мостов.

Задача 1. Можно ли привязать к гвоздям A, B, C, D, K, M веревку так, как показано на рисунке 3, не разрезая ее на части и не сдвигая?

Решение. Из рисунка видно, что из вершин A, B, C и D исходят по три ребра, а из вершин M и K — по пять. Получили, что все шесть вершин нечетны. Согласно свойству 4, найденному Эйлером, привязать веревку так, как требуется в условии задачи, невозможно.

Начертим теперь без отрыва карандаша от бумаги любую самопересекающуюся кривую так, чтобы в одном случае росчерк закончить в той же точке, с которой начали (рис. 4, а), а в другом — в точке, отличной от начальной (рис. 4, б). У нас получился граф, если точки самопересечения линии, а также ее начало и конец считать вершинами.

Подсчитаем теперь число дуг, исходящих из этих вершин. Мы видим, что из любой вершины графа на рисунке 4, а исходит четное число дуг и из любой вершины графа на рисунке 4, б, кроме вершин A и B , исходит также четное число дуг.

Это и аналогичные ему упражнения убеждают нас в том, что все графы, которые выполняются одним росчер-

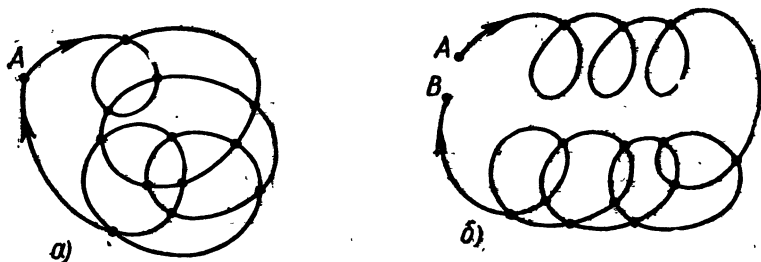


Рис. 4

ком, удовлетворяют свойствам 2 и 3, найденным Л. Эйлером.

Фигура (граф), которую можно начертить одним росчерком (без отрыва карандаша от бумаги и без повторения движения по каждой из дуг), называется *уникурсальной фигурой*.

Задача 2. В небольшой роще (рис. 5) находится заяц. Выскочив из норы и бегая по снегу от дерева к дереву, он оставил следы и, наконец, спрятался под одним из этих деревьев.

Где находится сейчас заяц? Под каким деревом находится его нора? Сколько решений имеет задача?

Решение. Будем считать каждое дерево вершиной графа, а путь зайца от дерева до дерева — ребром графа. Нетрудно обнаружить, что все вершины этого графа (кроме вершин *B* и *L*) четные. Значит, либо заяц находится под деревом, обозначенным буквой *L*, а его нора под деревом, обозначенным буквой *B*, либо наоборот.

Задача имеет два решения.

Если бы оказалось, что данный граф имеет только четные вершины, то задача имела бы столько решений, сколько

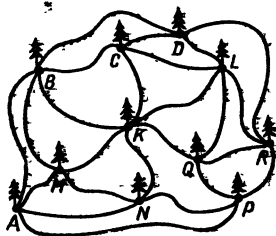


Рис. 5

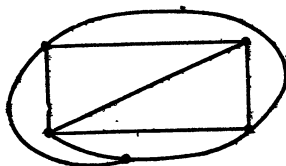


Рис. 6

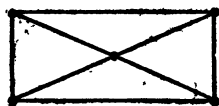


Рис. 7

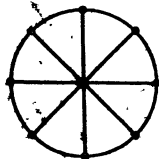


Рис. 8

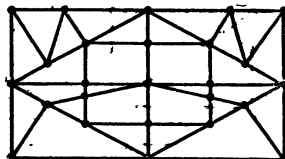


Рис. 9

ко вершин, причем заяц обязательно оказался бы в своей норе.

Рассмотрим теперь фигуру, изображенную на рисунке 6. У этой фигуры имеются только две нечетные вершины. По свойству 3 ее можно начертить одним росчерком. Заметим, что число росчерков равно половине числа нечетных вершин.

Фигуру, изображенную на рисунке 7, нельзя начертить одним росчерком: эта фигура имеет четыре нечетные вершины. Ее можно начертить самое меньшее двумя росчерками. И опять число росчерков оказалось равным половине числа нечетных вершин ($4 : 2 = 2$). Фигуры, изображенные на рисунках 8 и 9, можно начертить соответственно четырьмя и пятью росчерками. В этом случае минимальное число росчерков опять-таки равно половине числа нечетных вершин ($8 : 2 = 4$, $10 : 2 = 5$).

Итак, наименьшее число росчерков, которыми можно начертить тот или иной граф, равно половине числа нечетных вершин этого графа.

Задачи и упражнения

1. У какой уникурсальной фигуры начальная и конечная точки совпадают? Начертите одну такую фигуру.

2. У какой уникурсальной фигуры начальная и конечная точки не совпадают? Начертите одну такую фигуру.

3. Какие из фигур, изображенных на рисунке 10, являются уникурсальными? Изобразите стрелками один из вариантов обхода каждой из уникурсальных фигур.

4. Покажите, что если бы число мостов в задаче о семи мостах было на один больше или меньше, то можно пройти по всем мостам так, чтобы на каждом из них побывать лишь один раз. Нарисуйте соответствующий граф.

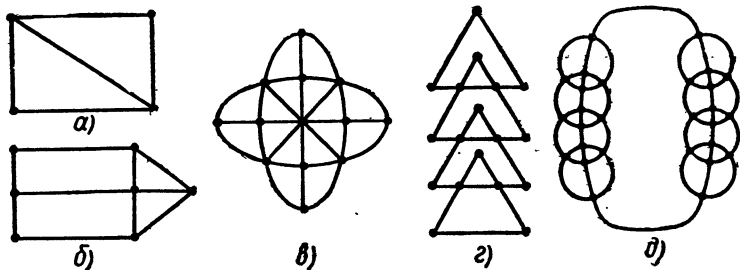


Рис. 10

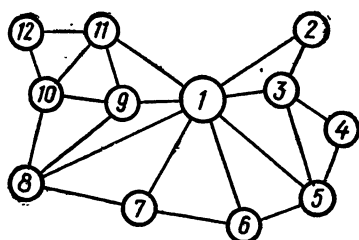


Рис. 11

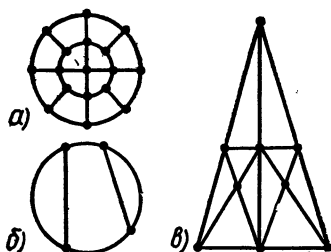


Рис. 12

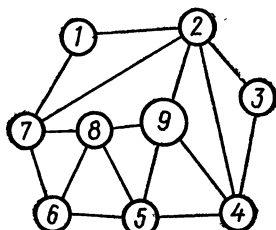


Рис. 13

5. Какие буквы русского алфавита уникурсальны?

6. Однажды пионеры попросили пионервожатую организовать экскурсию в большой городской парк. Пионервожатая, показав ребятам план парка (рис. 11), предложила им следующую задачу: «Найдите тот перекресток, откуда можно пройти по всем дорожкам только по одному разу». Решите и вы эту задачу.

7. Каково наименьшее число росчерков, которыми можно начертить каждую из данных на рисунке 12 фигур?

8. Водитель снегоочистительной машины заметил, что если по каждой улице города он проедет только по одному разу, то закончит свою поездку на том перекрестке, где находится гараж. На рисунке 13 дана схема улиц города. Найдите, с какого перекрестка должен начать водитель работу и на каком перекрестке тогда находится гараж?

Сколько решений имеет задача?

2. «ГЕОМЕТРИЯ НИТЕЙ»

Рассмотрим несколько нитей, у которых концы либо связаны в узел, либо свободны. На каждой из этих нитей имеется по нескольку узлов (рис. 14, 15). Подсчитаем число узлов на этих нитях и число промежутков, на которые узлы делят нить.

Для нитей, концы которых свободны (рис. 14), получим:

нить *a* имеет пять узлов и шесть промежутков;

нить *б* имеет шесть узлов и семь промежутков;

нить *в* имеет четыре узла, пять промежутков;

нить *г* имеет один узел, два промежутка.

Для нитей, концы которых связаны друг с другом (рис. 15), получим:

нить *a* имеет пять узлов и пять промежутков;

нить *б* имеет семь узлов и семь промежутков;

нить *в* имеет восемь узлов и восемь промежутков;

нить *г* имеет два узла и два промежутка.

Отсюда легко подметить следующую закономерность: в первом случае число узлов на единицу меньше числа промежутков, а во втором — число узлов равно числу промежутков. Если число узлов обозначить буквой *У*, а число промежутков — буквой *П*, то эти зависимости можно записать так:

$P - Y = 1$ — для нити со свободными концами;

$P - Y = 0$ — для нити со связанными концами.

Для нитей со свободными концами, но на концах которых

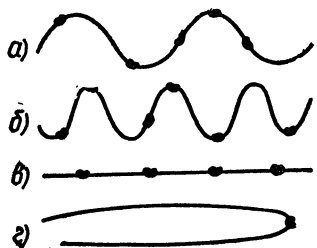


Рис. 14



Рис. 15



Рис. 16

сделаны узлы (рис. 16), получаем следующую формулу:

$$Y - \Pi = 1$$

Задача 1. Сколько столбов нужно установить на расстоянии 2 км, если расстояние между столбами 50 м?

Решение этой задачи сводится к третьему из рассмотренных случаев: $Y - \Pi = 1$;

$$\Pi = \frac{2000}{50} = 40; Y - 40 = 1; Y = 41 \text{ (столб)}.$$

Задача 2. Сколько кольев нужно для ограждения земельного участка прямоугольной формы, если длина участка равна 120 м, а ширина 60 м, причем колья нужно установить через каждые 3 м?

Решение. Прежде всего найдем периметр участка:

$$2(120 + 60) = 360 \text{ (м)}.$$

Решение этой задачи сводится к случаю $\Pi - Y = 0$.

$$\Pi = Y = \frac{360}{3} = 120 \text{ (колея)}.$$

Многие из «нитяных» ситуаций можно изобразить на плоскости в виде особого схематического рисунка, называемого графом. При этом узлы на нити изображаются точками (вершины графа), промежутки между узлами —

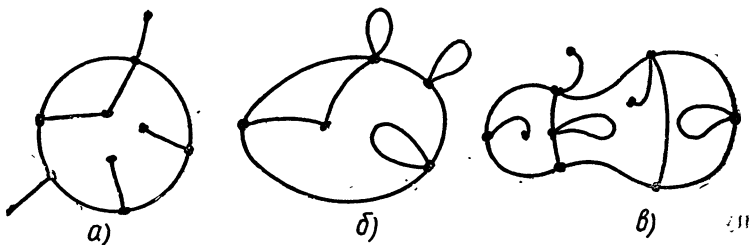


Рис. 17

дугами (ребра графа). Рассмотрим графы, показанные на рисунке 17. Мы видим, что эти графы состоят из вершин, ребер и граней¹ (частей, на которые разбивается плоскость данным графом). Так, граф, изображенный на рисунке 17, а имеет 10 вершин, 11 ребер и 3 грани (считая внешнюю); на рисунке 17, б — 5 вершин, 9 ребер и 6 граней; на рисунке 17, в — 10 вершин, 14 ребер и 6 граней.

Нетрудно обнаружить интересную закономерность, связывающую число вершин (V) с числом ребер (P) и числом граней (Γ) графа: $10-11+3=2$ (для графа на рис. 17, а); $5-9+6=2$ (для графа на рис. 17, б); $10-14+6=2$ (для графа на рис. 17, в); т. е. $V-P+\Gamma=2$.

Эта закономерность впервые также была обнаружена Л. Эйлером и получила название формулы Эйлера для плоского графа (определение плоского графа см. в п. 4).

Заметим, что две из ранее рассмотренных нами формул $\Pi-U=0$ и $U-\Pi=1$ являются частными случаями формулы Эйлера (проверьте это!).

Задача 3. Окружность и квадрат², пересекаясь, могут разбить плоскость самое большее на 10 частей. Найти число ребер графа, образующегося при их пересечении.

Решение. По условию задачи $\Gamma=10$. Рассчитаем число вершин этого графа. Так как каждая сторона квадрата пересекается с окружностью самое большее в двух точках, то $V=4 \cdot 2+4=12$ (добавляются 4 вершины квадрата). Тогда по формуле Эйлера имеем: $P=20$.

Задачи и упражнения

9. Между селами A и B , отстоящими друг от друга на расстоянии 5 км, провести телефонную линию. Сколько столбов для этого потребуется, если их следует установить по одному через каждые 50 м?

10. Длина маршрута автобуса 15 км. Сколько нужно остановочных указателей, если среднее расстояние между двумя остановками равно 500 м?

11. Схема линий метрополитена делит лист бумаги, на котором она изображена, на 7 областей (граней). Определите, сколько станций имеет это метро, если число отрезков пути между станциями равно 77.

¹ Этот элемент графа выделяется лишь при определенных условиях.

² Здесь и далее рассматриваются только контуры фигур.

12. Между пунктами A и B нужно провести водопровод. Определите расстояние AB , если для соединения труб требовалось 50 муфт¹ и длина каждого отрезка водопровода составляет 12 м.

13. Пассажир пожелал определить расстояние между двумя соседними станциями. С этой целью он подсчитал число ударов колес о стыки рельсов. Оно оказалось равным 1400. Зная, что длина каждого рельса 12 м, найдите расстояние между станциями.

14. Торт нужно разделить на 24 части. Каково наименьшее число попыток требуется для этого, если каждый раз торт делится только на две части?

3. ЛАБИРИНТЫ²

Задачи о лабиринтах по своему происхождению довольно древние. Бывало, что вокруг крепостей строили сооружения (лабиринты) по плану, известному только владельцу крепости, которые во время войны служили ему и его приближенным убежищем или местом для хранения драгоценностей. Иногда они использовались правителями для наказания. Человек, приговоренный к смертной казни, помещался в лабиринт. Не зная его устройства, он не находил выхода из него и после долгих скитаний погибал от голода.

Рассмотрим несколько простейших свойств, на которых основано решение некоторых задач о лабиринтах.

Пусть дана фигура (рис. 18), ограниченная несамопересекающейся замкнутой кривой l .

Во внутренней области, ограниченной этой кривой, возьмем точку A и из этой точки произвольно проведем лучи x, y, z, u, v . Легко заметить, что число точек пересечения любого из этих лучей с замкнутой кривой l нечетно.

К тому же результату придем, заменив лучи отрезками (или дугами), которые начинаются в точке A и кончаются в точке, расположенной во внешней области данной фигуры F (рис. 19), например в точке B .

Подсчитаем число точек пересечения таких дуг с кривой

¹ Муфта — деталь, служащая для соединения двух труб, вала, кабелей и т. д.

² Слово «лабиринт» египетское, означает «подземный ход».

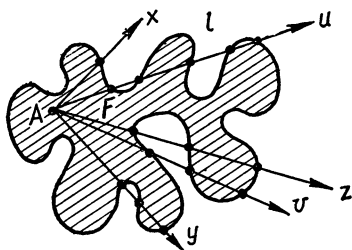


Рис. 18

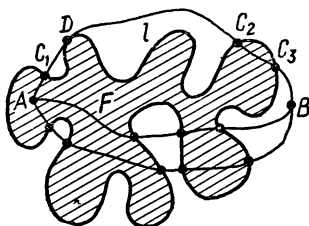


Рис. 19

вой (точки касания кривой l и дуги считать не будем). На рисунке 19 число точек пересечения одной из дуг AB с кривой l равно трем: C_1 , C_2 и C_3 .

Теперь можно установить следующее свойство.

1. Если число точек пересечения дуги AB с несамопересекающейся замкнутой кривой l нечетно, то одна из точек A и B является для фигуры, ограниченной кривой l , внешней, а другая — внутренней.

Для того чтобы установить, какая из этих точек (A или B) является внешней, а какая — внутренней для данной фигуры F , достаточно провести два произвольных луча с началом в точках A и B и подсчитать число точек пересечения этих лучей с кривой l . Если число точек пересечения луча с кривой l нечетно, то начало луча находится во внутренней области фигуры F , а если четно — то во внешней области этой фигуры.

Возьмем теперь произвольную точку A во внешней области фигуры F (рис. 20). Из точки A проведем произвольные лучи: x , y , z и k . Видим, что эти лучи или не пересекаются с замкнутой кривой l или пересекаются, и тогда число точек их пересечения (исключая точки касания) четно: 0, 2, 4.

Если во внешней области фигуры F возьмем две точки A и B и соединим их дугами (рис. 21), то видим, что число точек пересечения дуг, соединяющих точки A и B , с кривой l опять четное.

Тот же результат получим, взяв точки A и B во внутренней области фигуры F .

Итак, мы установили еще одно свойство.

2. Если число точек пересечения отрезка (или дуги) AB с несамопересекающейся замкнутой кривой l четно, то

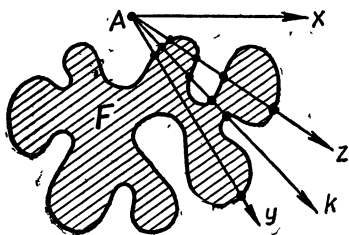


Рис. 20

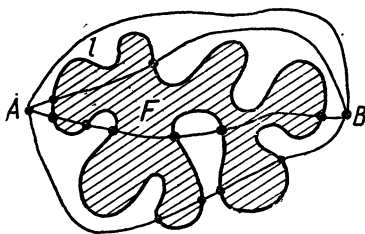


Рис. 21

точки A и B одновременно расположены или во внешней, или во внутренней области фигуры F .

Чтобы выяснить, в какой области (внутренней или внешней) находятся эти точки, достаточно провести произвольный луч с началом в одном из точек. Если число точек пересечения этого луча с кривой l четно (или точек пересечения нет), то эта точка находится во внешней области фигуры F ; в противном случае — во внутренней.

Пользуясь этими закономерностями, решим следующие задачи.

Задача 1. В лабиринте, изображенном на рисунке 22, даны точки A , B и C . Установить:

а) какие две из данных точек можно соединить без пересечения контура лабиринта;

б) из какой (из данных) точки можно выйти без пересечения контура лабиринта.

Решение. Прежде всего выясним, в какой области

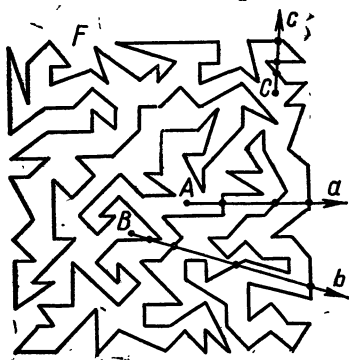


Рис. 22

находится каждая из этих точек. Для этого проведем по одному произвольному лучу (a , b , c) с началами в этих точках и посчитаем число точек пересечения этих лучей с контуром лабиринта. Лучи a и c пересекают его нечетное число, а луч b — четное число раз. Согласно первому свойству точки A и C находятся в одной и той же области, а точки A и B , B и C — в разных областях. Зна-

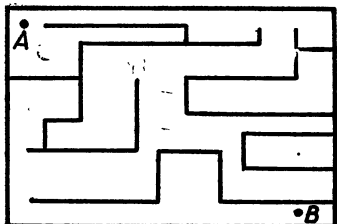


Рис. 23

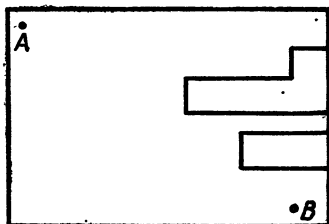


Рис. 24

чит, только точки A и C можно соединить без пересечения контура лабиринта.

Для ответа на следующий вопрос задачи необходимо выяснить, какие из этих точек находятся во внешней области лабиринта.

Согласно второму свойству точка B находится во внешней области, так как луч, проведенный из этой точки, пересекается с контуром лабиринта четное число раз. Значит, только из точки B можно выйти из лабиринта, не пересекая его контура.

Задача 2. На рисунке 23 изображен лабиринт. Можно ли из точки A попасть в точку B ?

Решение. Здесь мы не можем сразу применить вышеуказанные свойства, так как контур данного лабиринта не является простой замкнутой линией.

Для решения задачи нужно сначала выяснить, находятся ли точки A и B в одной области или в разных областях. Для этого поступим следующим образом.

Не будем обращать внимания на те линии лабиринта, которые исходят из нечетных вершин и заканчиваются в вершине с одним путем (тупиком). Очевидно, что от этого решение задачи не изменится. В результате получим новый лабиринт (рис. 24), который проще первого и к которому можно применить рассмотренные ранее свойства. Легко увидеть, что точки A и B находятся в одной области (внутренней). Следовательно, данная задача имеет решение.

Некоторые задачи о лабиринтах тесно связаны со свойством уникальности и неуникальности фигур. Например, ситуация задачи семи мостов Эйлера представляет собой своеобразный лабиринт. Рассмотрим следующую задачу.

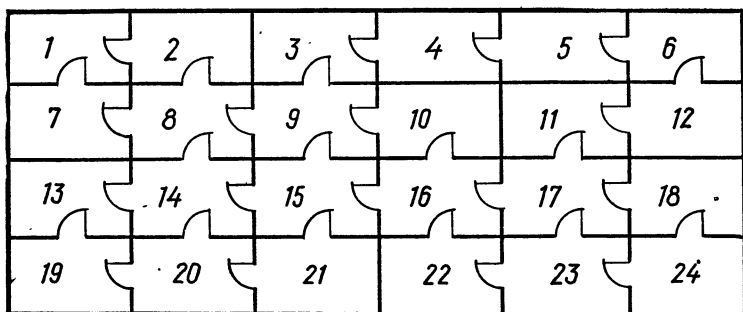


Рис. 25

Задача 3. На рисунке 25 изображен план здания. Требуется из комнаты 20 пройти все комнаты так, чтобы через каждую дверь пройти только один раз.

В какой комнате закончится такой обход?

Решение. Построим граф, соответствующий данной ситуации. Изобразим комнаты точками, а двери отрезками, соединяющими эти точки. Получим граф, изображенный на рисунке 26. Подсчитав число нечетных вершин, видим, что этот граф уникурсален, он имеет только две нечетные вершины (20 и 23). Следовательно, решение задачи свелось к возможности изобразить этот граф (рис. 26) одним росчерком.

Понятно, что, начиная движение из вершины 20 (комната № 20), мы закончим его в вершине 23 (комната № 23).

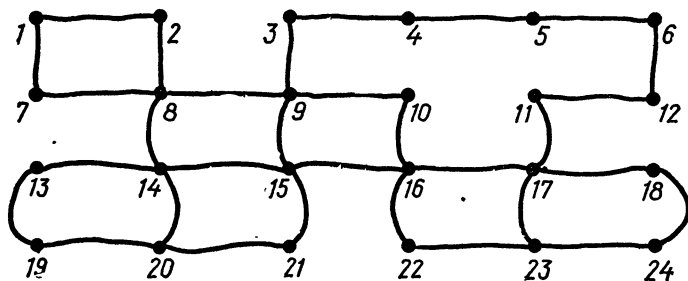


Рис. 26

Если бы полученный граф был неуникурсальным, то задача не имела бы решения.

Решение таких задач сводится, таким образом, лишь к установлению факта существования самого решения.

Выясним теперь, как можно найти решение задачи, если оно заведомо существует.

Задачи о лабиринтах можно подразделить на две группы:

а) задачи, где требуется найти путь в лабиринте, если указаны начальная и конечная точки движения;

б) задачи, где требуется найти выход из лабиринта.

Для решения подобных задач французский математик М. Тремо установил следующие правила:

Правило 1. Выйдя из начального пункта в лабиринте или из какого-либо его перекрестка, следует идти по произвольно выбранному пути до тех пор, пока не придешь к тупику или новому перекрестку; в первом случае, конечно, придется возвратиться назад, сделав отметку на стене (двумя крестиками, так как этот путь пройден два раза — вперед и назад), во втором же — идти дальше по какому-нибудь произвольно взятому направлению, отмечая каждый раз на стене вход в перекресток и выход из него.

Это правило применяют всякий раз, когда на пути встречается неизвестный перекресток. Естественно, что после нескольких переходов нам придется вновь попасть на такой перекресток, через который мы уже проходили. При этом возможны два случая: а) мы подходим к перекрестку по пути уже пройденному; б) идем к нему по новому пути. В зависимости от этого применяется одно из нижеследующих правил.

Правило 2. Приблизившись к перекрестку по новому пути, следует вернуться назад, отметив прибытие на перекресток и выход из него двумя крестиками.

Правило 3. Подойдя к перекрестку уже пройденным путем, следует направиться по новому пути, если он существует; а если такого пути нет, то нужно идти по пути, пройденному только один раз.

Рассмотрим теперь следующую задачу.

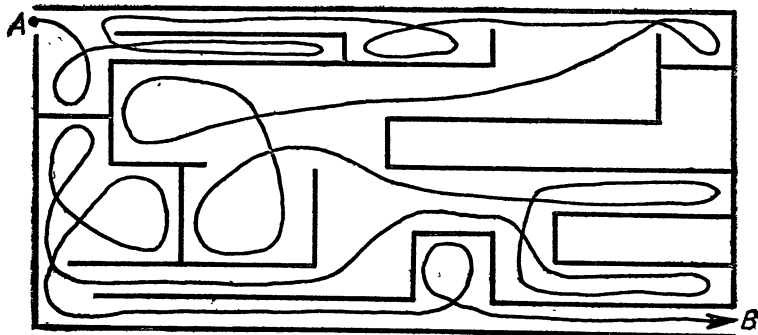


Рис. 27

Задача 4. Найти кратчайший путь в лабиринте (рис. 27), если даны вход в него *A* и выход *B*.

Рассмотрев этот лабиринт, замечаем, что в нем имеются запутывающие искусственные линии. Поскольку известно, что такой путь существует, поступаем следующим образом. Войдя через вход *A*, продолжим путь до встречи с тупиком, после чего движение становится невозможным. Тогда возвращаемся из этого тупика и продолжаем путь по другому направлению. В итоге мы придем в точку *B*.

Заметим, что во время такого движения мы прошли и ненужные отрезки пути. Попытаемся отыскать относительно эффективный путь. Для этого при возвращении из тупика необходимо пойти так, чтобы при выходе из него образовалась петля, которая, как и все другие петли, будет означать ненужный путь. Идя второй раз, минуя образовавшиеся петли, получим путь более короткий.

Существует также способ решения задач о лабиринтах, который называется «правилом одной руки». Сущность этого правила состоит в следующем: входя в лабиринт и обходя все его извилины, следует во все время пути касаться одной и той же рукой стены лабиринта до тех пор, пока не выйдешь из него.

Заметим, однако, что при этом могут остаться непосещенными те части лабиринта, которые не связаны с его наружной стеной и занимают, так сказать, «островное» положение. Таким образом, руководствуясь этим правилом, не всегда можно попасть к центру лабиринта или обойти все его ходы.

Задачи и упражнения

15. Помогите муравью добраться домой (рис. 28).
16. Найдите выход из точки А (рис. 29).



Рис. 28

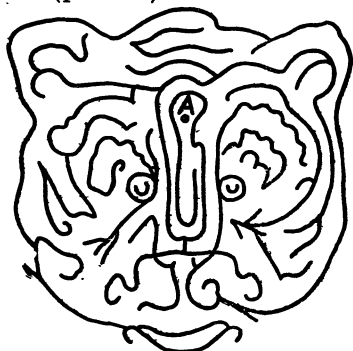


Рис. 29

17. Человек находится в точке А (рис. 30). Есть ли выход из этого лабиринта? Если есть, найдите его.

18. Нитка лежит на столе как показано на рисунке 31. В какой точке поставленный палец окажется в петле при стягивании нитки с двух концов в одном направлении?

19. На рисунке 32 изображен план здания. С какой

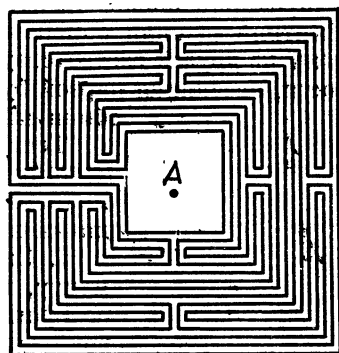


Рис. 30

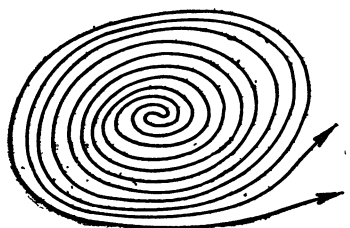


Рис. 31

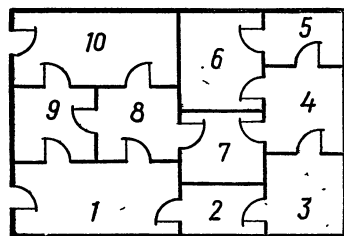


Рис. 32

комнаты нужно начать движение, чтобы пройти через все двери этого здания только один раз?

4. ЧТО ТАКОЕ ГРАФ

В задаче о кенигсбергских мостах нам уже встречалось понятие графа. Впервые термин «граф» в 1936 г. ввел венгерский математик Денеш Кениг, назвав графами схемы, состоящие из множества точек и связывающих эти точки отрезков прямых или кривых.

До конца XIX в. графы применялись лишь при решении некоторых занимательных задач и не привлекали серьезного внимания. Однако с начала XX в. теория графов оформилась в виде самостоятельной математической дисциплины, находящей в настоящее время широкое применение в автоматике, телемеханике, кибернетике, электронике, физике и в других областях науки.

Остановимся на некоторых вопросах этой теории. Пусть выпускники школы Андрей, Борис, Владимир, Георгий и Дмитрий решили обменяться фотографиями. Пусть каждому из друзей соответствует определенная точка на плоскости, названная первой буквой его имени, а проведенный обмен изображается отрезком или дугой.

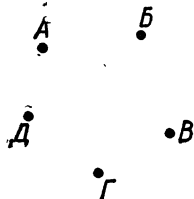


Рис. 33

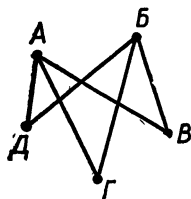


Рис. 34

Точки A, B, B, Г, Д называются *вершинами графа*, а отрезки линий (прямолинейные или криволинейные), соединяющие эти точки, *ребрами графа*.

1. Ситуация, соответствующая моменту, когда обмен фотографиями еще не произошел, представляет собой точечную схему, изображенную на рисунке 33. Эта точечная схема называется *нулевым графом*, т. е. нулевой граф состоит из изолированных вершин.

2. После того как произошел частичный обмен фотографиями: Андрей и Борис дали по фотографии Владимиру, Георгию и Дмитрию, а Владимир, Георгий и Дмитрий — по фотографии Андрею и Борису, соответствующий граф будет иметь вид, изображенный на рисунке 34. Такой граф называется *неполным графом*.

Этот граф мы можем изобразить так, чтобы линии, соединяющие точки $A, B, B, Г, Д$, кроме этих точек, других точек пересечения не имели (рис. 35).

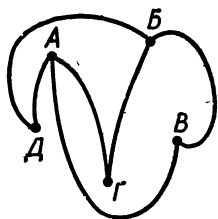


Рис. 35

Граф, который можно начертить на плоскости так, чтобы ребра его пересекались только в его вершинах, называется *плоским графом*. Следовательно, граф на рисунке 35 плоский. Этот же граф можно изобразить по-другому, изменив расположение вершин на плоскости (рис. 36). Графы, изображенные на рисунках 34, 35 и 36, дают нам одну и ту же информацию о решении предложенной задачи. По этой причине такие графы называют *одинаковыми* или *изоморфными*. Графы будут изоморфны, если: 1) между вершинами их можно установить взаимно однозначное соответствие и 2) две вершины одного графа соединены одним ребром, то и в другом графе соответствующие две вершины также должны быть соединены одним ребром (рис. 34, 35).

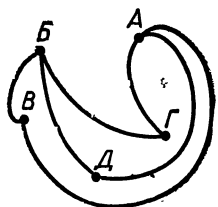


Рис. 36

3. Полному обмену фотографиями соответствует граф, показанный на рисунке 37. Этот граф является полным. Граф называется *полным*, если любые его две вершины соединены ребром. Заметим, что если полный граф имеет n вершин, то он будет иметь $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$ ребер.

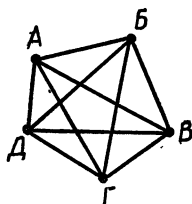


Рис. 37

При решении множества задач, касающихся теории графов, возникает необходимость определить, является ли данный граф плоским или нет. Для выяснения этого вопроса рассмотрим следующие две задачи.

Задача 1. От каждого из трех домиков, расположенных друг от друга на некотором расстоянии, проложите тропинки к кладовой, колодцу и станции так, чтобы ни одна из этих тропинок не пересекалась с другой (рис. 38).

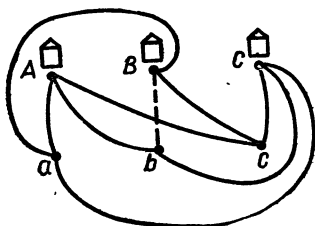


Рис. 38

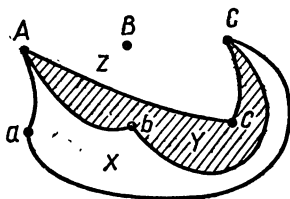


Рис. 39

Решение. Для решения этой задачи изобразим все объекты точками. Обозначим домики буквами A, B и C , а кладовую, колодец и станцию соответственно буквами a, b, c .

С помощью непосредственной проверки легко убедиться, что всегда можно провести 8 тропинок, которые, кроме указанных точек, других точек пересечения иметь не будут, а девятая тропинка обязательно пересечет хотя бы одну из них.

На рисунке 38 показан один из возможных вариантов проведения тропинок.

Решим эту задачу посредством рассуждений.

От домиков A и C проведем требуемые тропинки (рис. 39). Полученный граф разделит плоскость на области: X, Y и Z .

Легко заметить, что домик B может находиться в одной из этих областей. Рассмотрим каждый случай в отдельности.

I. Если домик B находится в области Z , то от него невозможно провести тропинку к b , которая не пересекалась бы ни с одной из уже проведенных тропинок.

II. Если домик B находится в области Y , то от него невозможно провести тропинку к объекту a , которая не пересекалась бы ни с одной из уже проведенных.

III. Если домик B находится в области X , то от него невозможно провести тропинку к объекту c , которая не пересекалась бы ни с одной из уже проведенных.

Итак, получается, что граф, выражающий ситуацию данной задачи, плоским быть не может. А это значит, что задача неразрешима.

Задача 2. Доказать, что любой полный граф, имеющий пять вершин, неплоский.

Решение. Вершины графа обозначим буквами A, B, C, D и K . Если по точкам A, B, C и D построим полный граф, то он будет плоским и разделит плоскость на четыре области. Обозначим эти области буквами X, Y, Z и U (рис. 40). Тогда точка K будет расположена в одной из этих областей.

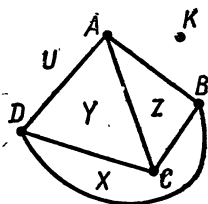


Рис. 40

Проведя рассуждения, аналогичные предыдущим, получаем, что полный граф с пятью вершинами действительно плоским быть не может.

В зависимости от содержания задачи из вершин графа, соответствующего этой задаче, может исходить равное или неравное число ребер. Условимся число ребер, исходящих из каждой вершины графа, называть *степенью вершины* графа. Например, в графе на рисунке 39 степень вершины A равна 3, степень вершины C равна 3, степень вершины a равна 2, степень вершины b равна 2, степень вершины c равна 2, степень вершины B равна нулю.

Каждое ребро графа связывает две вершины и, наоборот, для проведения каждого ребра необходимо иметь две его вершины. Следовательно, если мы сложим число степеней всех вершин графа, то получим удвоенное число ребер, так как каждое ребро графа будет подсчитано два раза.

Действительно, у графа на рисунке 39 удвоенное число ребер равно 12, сумма степеней всех вершин равна $3+3+2+2+2=12$.

Итак, если число ребер графа обозначить буквой P , вершины — буквами A, B, C, \dots, N , а их степени — соответственно буквами a, b, c, \dots, n , то мы можем написать:

$$2P = a + b + c + \dots + n. \quad (1)$$

Заметим, что a, b, c, \dots, n могут быть любыми целыми положительными числами.

Обозначим через B_i число тех вершин, степень которых равна i . Например, B_1 — число тех вершин, степень которых равна 1, B_2 — число тех вершин, степень которых равна 2, и т. д. Пользуясь этими обозначениями, равенство (1) можно записать в следующем виде:

$$2P = 1B_1 + 2B_2 + 3B_3 + \dots + nB_n. \quad (2)$$

У графа на рисунке 39 $B_1 = 0$, $B_2 = 3$, $B_3 = 2$,

$B_4=B_5=...=B_n=0$. В этом случае число ребер будет $P = \frac{1}{2} \cdot (1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) = 6$.

Если степени всех вершин графа равны, то граф называется *однородным*.

Ранее (в п. 1) была сформулирована следующая теорема: *число нечетных вершин любого графа четно*. Теперь мы докажем ее.

Запишем равенство (2):

$$2P = B_1 + 2B_2 + 3B_3 + 4B_4 + 5B_5 + \dots + nB_n.$$

Преобразуем его правую часть:

$$2P = (B_1 + B_3 + B_5 + \dots) + (2B_2 + 2B_3 + 4B_4 + 4B_5 + \dots),$$

Выражение, стоящее во второй скобке, есть сумма четных чисел, а потому является четным числом. Поскольку левая часть есть также четное число, значит сумма, стоящая в первой скобке, должна быть четным числом, т. е. $B_1 + B_3 + \dots + B_5 \dots$ — четное число, что требовалось доказать.

Задача. Доказать, что число зрителей, пришедших на стадион смотреть футбольный матч и имеющих нечетное число знакомых (среди того же множества зрителей), четно.

Решение задачи следует непосредственно из только что доказанной теоремы.

5. СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

Рассмотрим следующую задачу. Пусть на рисунке 41 изображена схема дорог какого-либо населенного пункта. Требуется найти дорогу, соединяющую перекрестки A и R .

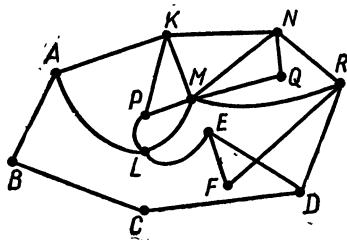


Рис. 41

Легко заметить, что имеется много дорог, идущих от A к R . Для нахождения одной из них поступаем следующим образом. Двигаемся от A по направлению к R до перекрестка, а затем к другому перекрестку и т. д. В конце нашего движения мы достигнем перекрестка R . По-

сколько в условии задачи никаких ограничений не дано, то, двигаясь от перекрестка A к перекрестку R , мы можем побывать на любом перекрестке или улице больше одного раза. Если бы потребовалось найти кратчайшую дорогу, то мы определили бы все дороги от A к R и их сравнением нашли кратчайшую.

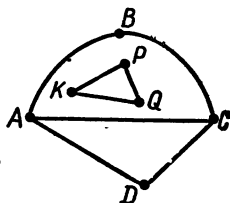


Рис. 42

Если при следовании от A к R на каком-либо перекрестке мы побываем больше одного раза, например, если пройдем по пути $ALMNKMR$ и на перекрестке M побываем два раза, то, вычитая из этого пути путь $MNKM$, получим путь $ALMR$, который короче пройденного. Отметим, что на перекрестках A , L , M и R мы были только один раз. Такой путь в теории графов называется *дугой* (линия на графе, не проходящая ни через одну из вершин более одного раза). Согласно сказанному дугами будут: $AKNR$, $ALMNR$ и т. д. Дуги могут иметь самопересечения, например, путь $ABCDEFR$ также является дугой.

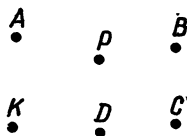


Рис. 43

Линия на графе, не проходящая ни по какому ребру более одного раза, называется *цепью*. Например, $ALMNKMR$ является цепью, которая соединяет вершины A и R .

Если, начав движение от вершины A , пройдем по нескольким вершинам графа так, что на каждом ребре побываем только один раз, а затем вернемся в ту же вершину A , то такой путь называется *циклом*. Вообще любая замкнутая цепь называется циклом. На рисунке 41 циклом являются пути $ALMKA$ и $ABCDNRKA$.

Если все вершины цикла разные, то такой цикл называется *элементарным*, в противном случае — *неэлементарным*.

Например, цикл $ALMKPMNKA$ (рис. 41) является неэлементарным циклом.

Может случиться, что цикл охватит все ребра графа в точности по одному разу. Такой цикл называется *эйлеровой линией*.

Граф называется *связным*, если любые две из его вер-

шин связаны какой-то цепью (т. е. это такой граф, который не имеет ни одной изолированной вершины).

Например, граф на рисунке 42 не связный, так как из вершин A, B, C, D нельзя пройти к вершинам K, P, Q . Тоже самое можно сказать о графе на рисунке 43, который одновременно является нулевым графом.

Т е о р е м а. Любой связный граф имеет хотя бы две вершины, степени которых равны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим вершины графа через $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, а степени этих вершин соответственно через $\rho(X_1), \rho(X_2), \rho(X_3), \dots, \rho(X_n)$.

Тогда по определению степени вершины связного графа

$$1 \leq \rho(X_i) \leq n-1, \\ \text{где } 1 \leq i \leq n.$$

Если предположить, что все степени вершин различны, то окажется, что каждая из них представлена числом из промежутка $[1, n-1]$. Но число вершин графа n и потому, хотя бы для двух вершин степени, должны быть равны.

З а м е ч а н и е. Теорема верна и для любого несвязного графа, так как каждый несвязный граф представляет собой множество отдельных связных графов.

З а д а ч а. Доказать, что среди улиц любого города всегда найдутся хотя бы два перекрестка, на которых сходится одно и то же число улиц.

Р е ш е н и е. Считая перекрестки улиц вершинами, а сами улицы между двумя перекрестками ребрами, можно условие задачи представить в виде связного графа. Доказательство непосредственно следует из только что рассмотренной теоремы.

В теории графов обычно рассматриваются связные графы, так как если граф несвязный, то он должен состоять из независимых друг от друга компонентов, каждый из которых, взятый в отдельности, связный. Следовательно, любой компонент несвязного графа можно рассматривать независимо от других.

Пользуясь введенными выше понятиями, можно доказать следующие теоремы.

Т е о р е м а. Связный граф, степени всех вершин которого четные, является эйлеровой линией.

Доказательство этой теоремы приводить не будем.

Т е о р е м а. Для того чтобы на связном графе имела цепь $l(A, B)$, содержащая все ребра графа в точности

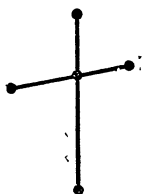


Рис. 44

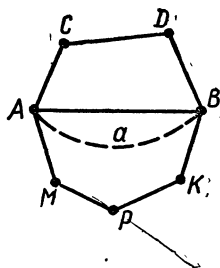


Рис. 45

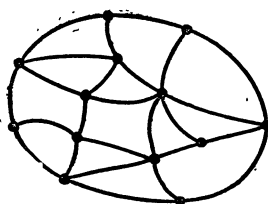


Рис. 46

по одному разу, необходимо и достаточно, чтобы A и B были единственными вершинами этого графа нечетной степени.

Доказательство.

Необходимость. Если граф имеет более двух вершин с нечетной степенью, то легко заметить (рис. 44), что этот граф не может содержать цепь, которая содержала бы все ребра графа в точности по одному разу.

Достаточность. Пусть дан граф, степени всех вершин которого четны, кроме двух вершин A и B , степень которых нечетна (рис. 45). Для доказательства вершины A и B соединим дугой a . Степени всех вершин полученного графа будут четными и согласно предыдущей теореме новый граф будет эйлеровой линией.

Если мы теперь удалим дугу a , то получим цепь $l(A, B) = ACDBKPMAB$, которая содержит все ребра графа в точности по одному разу. При этом цепь $l(A, B)$ начинается от одной из этих вершин с нечетной степенью и кончается в другой такой же.

Итак, эти две теоремы показывают, что для того, чтобы граф был уникурсальным (см. п. 1), необходимо, чтобы степень всех вершин графа была четной или чтобы граф имел только две вершины с нечетной степенью.

Задачи и упражнения

20. Можно ли на Московском метрополитене за 5 коп. побывать на всех станциях в пределах кольцевой линии при условии, что в каждом направлении разрешается следовать только один раз. Ответ обоснуйте.

21. На рисунке 46 дана схема улиц поселка. Какое наименьшее число автобусов требуется для обслуживания

населения автотранспортом, если по каждому участку пути, заключенному между двумя соседними перекрестками, должен пройти только один автобус.

6. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

Рассмотрим такой пример. Восемь учеников участвуют в школьных соревнованиях по шахматам. При этом каждая пара учащихся должна играть между собой только один раз. После некоторого числа встреч сложившейся ситуации соответствует граф, изображенный на рисунке 47. По этому графу легко определить, сколько партий разыграно и кто с кем встретился. Однако мы не можем ничего сказать о результатах состязаний (выигрыши, проигрыши, ничьи).

Чтобы с помощью графа можно было ответить и на эти вопросы, будем поступать следующим образом. Если игрок A при встрече с игроком B выиграл, то на линии AB графа покажем стрелку от A к B , а если они закончили игру вничью, то на ребре AB показываем стрелками два направления (от A к B и от B к A). Тогда ребра графа будут ориентированными (рис. 48).

Граф, на котором указаны направления всех его ребер, называется *ориентированным* графом.

Граф, на котором имеются как ориентированные, так и неориентированные ребра, называется *смешанным* графом. Например, граф на рисунке 49 ориентированный, а граф на рисунке 50 смешанный.

Ориентированные графы имеют широкое применение на практике. Так, например, при решении задач, связанных с уличным движением, могут встретиться улицы как с односторонним, так и с двусторонним движением.

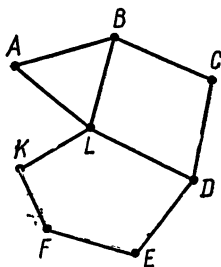


Рис. 47

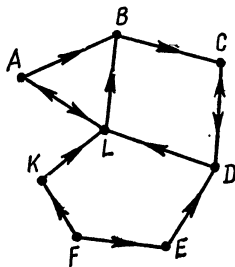


Рис. 48

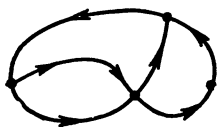


Рис. 49



Рис. 50

При составлении карты уличного движения какого-либо города, в котором только одностороннее движение, обязательно должно быть указано направление движения, при этом ориентация улиц должна производиться так, чтобы без нарушения правил уличного движения можно было проехать из одного любого участка города в любой другой.

Если мы попытаемся это требование выразить языком теории графов, то его можно сформулировать так: граф нужно ориентировать так, чтобы любые его две вершины были соединены ориентированной цепью. Ясно, что такой граф должен быть связным, однако этого еще недостаточно для существования возможности нормального движения.

Пусть ребро, связывающее вершины A и B , является единственным путем между ними (рис. 51). Чтобы из любой вершины фигуры F пройти ориентированным путем к любой вершине фигуры F_1 , ребро AB должно быть ориентировано от A к B . Если же мы попытаемся пройти из какой-либо вершины фигуры F_1 к нужной вершине фигуры F , то увидим, что это невозможно. Чтобы был возможен взаимный переход от вершины фигуры F к вершине фигуры F_1 (рис. 51) и наоборот, необходимо, чтобы ребро AB было ориентировано в двух направлениях¹.

В ориентированном графе путь, соединяющий две вершины, может быть и не единственным. Например, на рисунке 51 ребро, соединяющее вершины A и B , единственное, а путь, соединяющий вершины X и Y , не единственный.

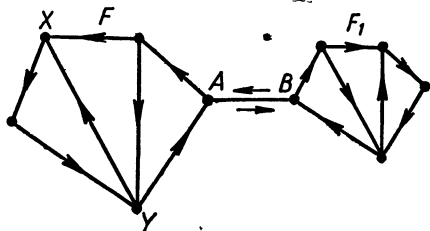


Рис. 51

¹ Точнее было бы провести ориентированные ребра (от A к B и от B к A), но это усложнило бы изображение графа.

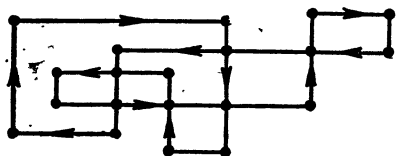


Рис. 52

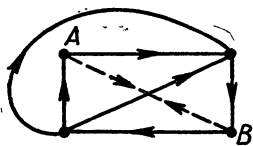


Рис. 53

В теории графов пути вида AB называются *связывающими*, а пути вида YU — *циклическими*.

Ребро, удаление которого приводит к увеличению числа связных компонентов графа, называется *связывающим* ребром или *перешейком* (например, ребро AB на рис. 51).

Ребро, не являющееся связывающим, называется *циклическим* ребром (например ребро XU на рис. 51).

Докажем следующую теорему.

Теорема. Если схема (граф) уличного движения города уникурсальная и не имеет ни одного связывающего ребра, то на всех улицах города можно установить одностороннее движение.

Доказательство теоремы разобьем на два случая.

Случай I. Предположим, что уличная сеть города представляет такой связный граф (без связывающих ребер), где из любой вершины исходит четное число ребер (рис. 52). Поскольку данная сеть уникурсальна, то из любого перекрестка можно пройти все ее улицы в точности по одному разу, и, если в направлении каждого движения поставить стрелки, получим ориентированный граф.

Легко заметить, что вследствие подобной ориентации любые две вершины этого графа будут соединены ориентированной цепью.

Случай II. Пусть уличная сеть уникурсальна, но имеет два перекрестка A и B , из которых исходит нечетное число улиц (больше 1) (рис. 53), и пусть также изображающий ее граф не имеет связывающих ребер. Для того чтобы в этом городе установить одностороннее движение, поступаем следующим образом.

Из графа мысленно удалим какую-либо цепь, соединяющую вершины A и B с нечетной степенью. В этом случае мы получим некоторый новый граф, из всех вершин которого исходит четное число ребер. Ориентируя

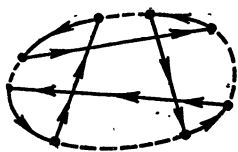


Рис. 54

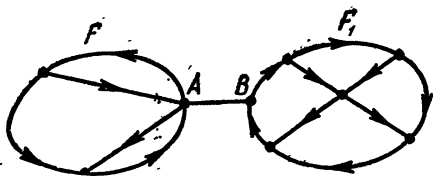


Рис. 55

ребра так, как и в первом случае, получим, что любые две вершины ее будут соединены ориентированной цепью.

Теперь восстановим ту цепь, которую мы удалили (AB), и сориентируем ее в любом направлении. От этого возможность связать всю сеть города односторонним движением не нарушится.

Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет решить задачу о возможности установления одностороннего движения в городе, уличная сеть которого не является уникурсальной.

1. Пусть сеть имеет $2k$ вершин, степень которых нечетна (больше или равна 2). При этом также будем полагать, что граф не имеет связывающих ребер (рис. 54).

Если из этой сети удалим k дуг, соединяющих вершины с нечетной степенью, то мы получим уникурсальную сеть, степень любой вершины которой четна.

Ориентируя полученную сеть согласно способу, данному в доказательстве теоремы, и восстановив удаленные дуги (улицы), ориентируя их в любом направлении, мы свяжем все улицы этого города односторонним движением.

2. Рассмотрим теперь случай, когда сеть имеет связывающее ребро AB (рис. 55).

Легко заметить, что части F и F_1 этой сети можно ориентировать согласно способу, рассмотренному в случае 1.

Остается открытым вопрос об ориентации ребра AB . Если ребро AB ориентировать в двух направлениях, то движение по всей сети будет односторонним, а по ребру AB — двусторонним.

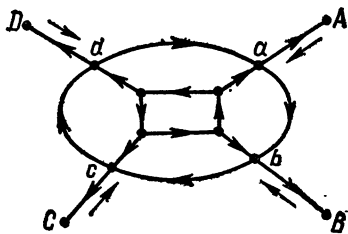


Рис. 56

3. Пусть уличная сеть города имеет такие вершины, степень которых равна 1 (рис. 56). Тогда для нормального движения по городу необходимо ребра Aa , Bb , Cc , Dd сориентировать в двух направлениях.

В противном случае невозможно будет из любой вершины сети попасть в любую из оставшихся вершин.

Рассмотренные ситуации показывают, что если сеть имеет n связывающих ребер и k вершин степени 1, то для ориентации всей сети необходимо $(n+k)$ соответствующих дуг ориентировать в двух направлениях.

7. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА О ПЛОСКОМ ГРАФЕ

Рассмотрим следующую задачу:

Задача. Доказать, что если каждый из городов A , B , C и D (рис. 56) соединить с ближайшим соседним городом, то сеть этих городов не может быть замкнутой и не может быть самопересекающимся четырехугольником (расстояния между городами различны).

Решение. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что граф, соответствующий условию задачи, представляет собой замкнутый четырехугольник (рис. 57).

Заметим, что ребра этого графа не обязательно прямые. Пусть город A расположен ближе к B , чем к C и D , город B — ближе к C , чем к A и D , C — ближе к D , чем к A и B , и D — ближе к A , чем к B и C .

Тогда можем написать, что:

$$\begin{aligned} |AB| &< |AD|, \\ |BC| &< |AB|, \\ |CD| &< |CB|, \\ |DA| &< |CD|. \end{aligned} \quad (*)$$

Сложив неравенства (*) почленно, получим:

$$|AB| + |BC| + |CD| + |AD| < |AD| + |AB| + |CB| + |CD|, \\ \text{или } 0 < 0.$$

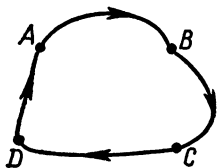


Рис. 57

Полученное противоречие показывает, что граф, соответствующий этой ситуации, не может быть замкнутым четырехугольником. Аналогично доказывается, что решение задачи не может быть изображено в виде, указанном на рисунке 58 и 59.

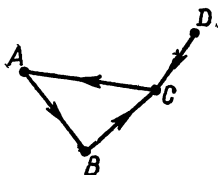


Рис. 58

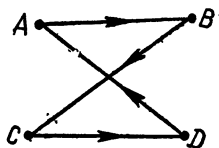


Рис. 59

Решение этой задачи показывает, что имеются только две возможности соединения пунктов A, B, C и D , удовлетворяющие условию задачи (рис. 59, 60).

Легко заметить, что ни один из графов на рисунках 60, 61 не содержит в себе цикла.

Связный граф, не имеющий циклов, называется *деревом*. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. Число вершин каждого дерева на единицу больше числа его ребер.

В самом деле, как бы ни было начерчено дерево, оно не разделит плоскость на отдельные области.

Пусть дерево имеет n вершин и P ребер. Поскольку любое дерево — плоский граф, то для него имеет место формула Эйлера:

$$B - P + \Gamma = 2.$$

Подставляя в эту формулу $B = n$, $\Gamma = 1$ (одна плоскость чертежа), получим:

$$n - P + 1 = 2,$$

откуда

$$P = n - 1,$$

или

$$n = P + 1.$$

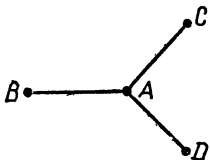
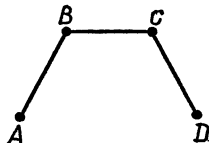


Рис. 60



61

Следовательно, если мы вернемся к решению задачи, то заметим, что граф, соответствующий ее решению, должен иметь три ребра, так как $n=4$.

Здесь и в п. 2 мы познакомились с формулой Эйлера для плоского графа. Теперь докажем ее справедливость.

Т е о р е м а. Для любого плоского графа имеет место соотношение

$$B - P + \Gamma = 2, \quad (1)$$

где B — число вершин графа; P — число его ребер; Γ — число его граней.

Доказательство этой теоремы проведем методом математической индукции (по числу граней Γ). Пусть дан плоский граф, число граней которого равно 1, и предположим, что этот граф имеет n вершин (а следовательно, он будет иметь $n-1$ ребер) (см. п. 7). В этом случае

$$B - P + \Gamma = n - n + 1 + 1 = 2.$$

Таким образом, при $\Gamma=1$ соотношение (1) верно.

Предположим теперь, что соотношение (1) верно для такого плоского графа, который имеет k граней, и докажем, что оно верно для плоского графа, который имеет $k+1$ грань.

Пусть плоский граф, изображенный на рисунке 62, имеет k граней.

Добавим к этому графу новую грань F так, чтобы полученный граф был также плоским (на рис. 62 грань изображена пунктиром). Получим граф с $k+1$ гранью.

Предположим, что грань F имеет m ребер, из которых l ребер совпадает с ребрами прежнего графа. Тогда $l+1$ вершин грани F также совпадают с $l+1$ вершинами прежнего графа. Следовательно, для вновь полученного графа будем иметь:

$$B_1 = B + m - (l+1),$$

$$P_1 = P + (m-l),$$

$$\Gamma_1 = k+1,$$

где B_1 , P_1 и Γ_1 — соответственно число вершин, ребер и граней графа с числом граней $k+1$. Подставим эти значения B_1 , P_1 и Γ_1 в выражение $B - P + \Gamma$.

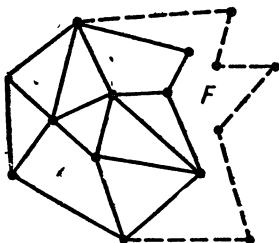


Рис. 62

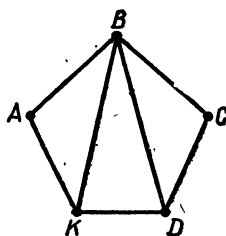


Рис. 63

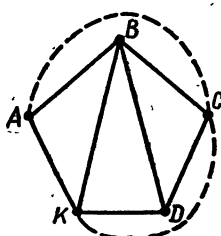


Рис. 64

Получим:

$$B_1 - P_1 + \Gamma_1 = B + m - (l + 1) - P - (m - l) + k + 1,$$

или

$$B_1 - P_1 + \Gamma_1 = B - P + k.$$

Так как $B - P + k = 2$, то и $B_1 - P_1 + \Gamma_1 = 2$.

Задача 1. На плоскости даны 6 прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. На сколько областей разбивают плоскость эти прямые?

Решение. Каждая прямая должна пересекаться с пятью другими прямыми и при этом она делится на 6 частей. Подсчитав число вершин и ребер полученного графа, найдем:

$$B = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15, \quad P = 6 \cdot 6 = 36.$$

Из формулы Эйлера получим: $\Gamma = 2 + P - B$ или $\Gamma = 2 + 36 - 15 = 23$. Считая плоскость областью, получим окончательный результат: $23 - 1 = 22$ (области).

Пусть имеется некоторый плоский граф. Если в этом плоском графе соединить все те вершины, от соединения которых граф не перестанет быть плоским, то получим новый граф, который назовем *полным плоским* (или *максимально плоским*) *графом*.

На рисунке 63 изображен плоский граф, имеющий пять вершин. Этот граф не является полным плоским графом, так как у него имеются такие (свободные для связи) вершины, от соединения которых граф не перестанет быть плоским (например, вершины A и D).

Таким образом, полным плоским графом называется граф, который при добавлении к нему любого ребра перестанет быть плоским.

На рисунке 64 изображен полный плоский граф. В самом деле, этот граф получен из графа, изображенного на рисунке 63, соединением двух пар «свободных» вершин A и C , K и C ; при этом он остался плоским. Других таких вершин нет (остались две не соединенные вершины A и D , но при соединении их граф не перестанет быть плоским).

Если число вершин полного плоского графа не меньше трех ($n \geq 3$), то все его грани являются треугольниками (прямолинейными или криволинейными), что видно и на рисунке 64.

Полный плоский граф с n вершинами имеет не меньше ребер, чем любой плоский граф с тем же числом вершин.

Рассмотрим следующее интересное свойство полного плоского графа, часто используемое при решении задач.

Полный плоский граф с числом вершин n , где $n \geq 3$, имеет $3n - 6$ ребер.

Действительно, согласно определению полного плоского графа имеем: $2P = 3\Gamma$, где P — число ребер графа; Γ — число граней графа.

Так как граф является плоским, то справедливо соотношение:

$$V - P + \Gamma = 2.$$

Подставив в это соотношение значение $V = n$ и $\Gamma = \frac{2P}{3}$, получим:

$$n + \frac{2P}{3} - P = 2,$$

или

$$P = 3n - 6.$$

Используя это свойство, можно вычислить также число граней любого полного плоского графа, зная число его вершин n . Для этого подставим значение $P = 3n - 6$ в равенство $3\Gamma = 2P$, получим: $\Gamma = 2n - 4$.

Задача 2. На сторонах четырехугольника взято соответственно 5, 6, 7 и 8 точек (не считая вершин четырех-

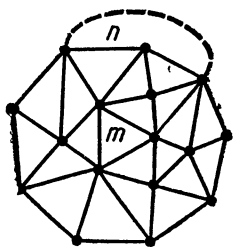


Рис. 65

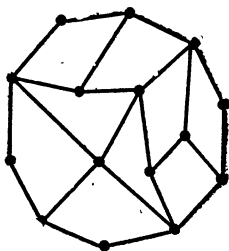


Рис. 66

угольника), которые соединены друг с другом так, что никакие два отрезка, кроме этих точек, других общих точек не имеют. На какое наибольшее число частей разбивается этот четырехугольник данными отрезками?

Решение. Мы можем составить плоский граф, который отвечает условию задачи. Он будет иметь $V=5+6+7+8+4=30$ вершин и $P=3V-6-(V-3)=2V-3$ ребер.

В нашем случае $V=30$, потому $P=2 \cdot 30-3=57$, и по формуле Эйлера получим:

$$G=29; 29-1=28.$$

Ответ. 28.

Задача 3. Если внутри n -угольника взять m произвольных точек и соединить их друг с другом и вершинами n -угольника так, чтобы, кроме этих точек, не было бы никаких других точек пересечения, то внутренняя область многоугольника разобьется на $n+2m-2$ треугольника.

Решение. Возьмем n -угольник и в нем m произвольно расположенных точек. Соединим эти точки друг с другом и вершинами n -угольника (рис. 65). Получим граф. Если проведем всевозможные непересекающиеся ребра во внешней области графа (одно из них изображено на рис. 65 штриховой линией), то получим полный плоский граф с числом вершин $m+n$ (и числом проведенных ребер $n-3$).

Согласно доказанному ранее свойству этот граф будет иметь $3(m+n)-6$ ребер.

Если из числа ребер полного плоского графа вычтем $n-3$, то получим число ребер данного графа; оно равно $2n+3m-3$.

Обозначив число треугольных областей через Γ_3 , получим:

$$n + 3\Gamma_3 = 2(2n + 3m - 3),$$

или

$$\Gamma_3 = n + 2m - 2.$$

Возникает вопрос о том, можно ли получить аналогичное разбиение n -угольника на четырехугольники. И если это возможно, то сколько таких четырехугольников образуется.

Оказывается, что для того, чтобы n -угольник можно было разбить на четырехугольные области (необязательно выпуклые), необходимо, чтобы n было четным. В этом случае число четырехугольников будет равным $\frac{n}{2} + m - 1$.

Действительно, ситуации, определенной условием задачи, соответствует плоский граф, изображенный на рисунке 66. Обозначив в этом графе число ребер через P , число вершин через V , число граней через Γ , а число четырехугольников через Γ_4 , получим:

$$2P = 4\Gamma_4 + n,$$

$$V = m + n,$$

$$\Gamma = \Gamma_4 + 1.$$

Поскольку граф является плоским, имеет место следующее соотношение:

$$V - P + \Gamma = 2.$$

Подставив в это равенство соответствующие значения P , V и Γ , найдем:

$$2(n + m) + 2(\Gamma_4 + 1) - 4\Gamma_4 - n = 4,$$

откуда

$$\Gamma_4 = \frac{n}{2} + m - 1.$$

Так как Γ_4 и m — целые числа, то n должно быть четным числом.

Задача 4. Внутри выпуклого 20-угольника взяты 8 точек, которые соединены отрезками друг с другом и вершинами многоугольника так, что эти отрезки других областей (кроме данных) точек не имеют. Сколько отрезков проведено внутри этого многоугольника?

Решение. Результат решения предыдущей задачи позволит нам вычислить число всех треугольных областей:

$$\Gamma_3 = 20 + 2 \cdot 8 - 2 = 34.$$

Вместе с внешней областью их будет $34+1=35$. Тогда $B=m+n=28$, и по теореме Эйлера имеем:

$$P=35+28-2=61,$$

$$P_1=P-20=41 \text{ (отрезок)}.$$

Задача 5. Для того чтобы m -угольник непересекающимися (кроме как в вершине) диагоналями разделился на k -угольные области, необходимо и достаточно, чтобы m было числом вида $n(k-2)+2$, где n — любое натуральное число.

Решение. Пусть в m -угольнике можно провести p непересекающихся диагоналей, которыми его внутренняя область делится на k -угольники.

Заметим, что в этом случае образуется $p+1$ k -угольников. Следовательно, можем записать:

$$2P=k(p+1)+m.$$

С другой стороны, $P=p+m$. Подставляя значение P из этого равенства в предыдущее, получим:

$$2(p+m)=k(p+1)+m,$$

откуда

$$P=\frac{m-k}{k-2}.$$

Кроме того, нам известно, что $\Gamma_k=p+1$, или $\Gamma_k=\frac{m-2}{k-2}$, где Γ_k — число k -угольников. Поскольку p и Γ — целые положительные числа, то числа $\frac{m-k}{k-2}$ и $\frac{m-2}{k-2}$ также должны быть целыми.

Значит, $m-k=n(k-2)$, или $m=n(k-2)+k$, где n — натуральное число; с другой стороны, получаем, что $m-2=n(k-2)$, или $m=n(k-2)+2$.

Заметим, что множество чисел $m=n(k-2)+2$ содержится в множестве чисел $m=n(k-2)+k$; следовательно, можно взять значение $m=n(k-2)+2$.

Формулы $p=\frac{m-k}{k-2}$ и $\Gamma_k=\frac{m-2}{k-2}$ дают возможность решить многие задачи на разбиения.

Задача 6. m -угольник с непересекающимися (кроме как в вершине) диагоналями разбит на 60 шестиугольных областей. Найти значение m .

Решение. Используя результат решения предыдущей задачи, имеем: $\Gamma_k = \frac{m-2}{k-2}$.

По условию имеем: $60 = \frac{m-2}{6-2}$, откуда $m = 242$.

Рассмотрим теперь следующую теорему.

Теорема. *Полный граф с числом вершин n будет плоским, если $n \leq 4$.*

Доказательство. В самом деле, по определению полный граф имеет $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер, а полный плоский граф с n вершинами имеет $3n-6$ ребер.

Поскольку число ребер любого плоского графа не больше, чем число ребер полного плоского графа с тем же числом вершин, имеет место следующее неравенство:

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq 3n-6, \text{ или } n^2 - 7n + 12 \leq 0.$$

Решив это неравенство, получим, что $n \leq 4$. Итак, если полный граф имеет 5 и более вершин, он плоским быть не может.

Рассмотрим теперь несколько известных занимательных задач, решение которых без применения теории графов проводится весьма сложно.

Задача 7. На какое наибольшее возможное число областей могут разбить плоскость два пересекающихся выпуклых многоугольника, имеющих соответственно m и n сторон ($n \leq m$)?

Решение. Пусть вершины многоугольников и точки их взаимного пересечения являются вершинами графа. Тогда этот граф будет плоским и для него справедлива формула Л. Эйлера

$$B - P + \Gamma = 2.$$

Установим число вершин и ребер этого графа.

$$B = B_1 + X,$$

где $B_1 = m + n$; X — число точек пересечения многоугольников.

$$2P = 4X + 2B_1,$$

так как степень каждой вершины многоугольника равна 2, а степень каждой точки пересечения равна 4.

Подставим B и P в формулу Эйлера, получим:

$$B_1 + X - 2X - B_1 + \Gamma = 2,$$

откуда

$$\Gamma = X + 2.$$

Значение Γ максимально, если максимально значение X . Так как $X \leq 2n$ (каждая сторона n -угольника пересекает сторону m -угольника не больше, чем в двух точках), то ясно, что значение Γ будет максимальным при $X = 2n$. Тогда $\Gamma = 2n + 2$.

Покажем, что для любых m и n ($n \leq m$) можно сконструировать такие многоугольники, для которых имеет место соотношение $\Gamma = 2n + 2$.

Проведем произвольную окружность и возьмем на ней m различных точек. Соединив их последовательно, получим вписанный m -угольник.

Начиная с какой-нибудь дуги (стягивающей сторону m -угольника), отметим n точек (по одной на дуге), не совпадающих с вершинами m -угольника. Соединив эти точки последовательно, получим вписанный в ту же окружность n -угольник.

Устранив окружность, получим искомую ситуацию деления плоскости на $2n + 2$ областей.

Заметим, что максимальное число областей разбиения не зависит от числа сторон многоугольника, имеющего большее число сторон.

Задача 8. На плоскости даны 1000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Будем последовательно соединять точки непересекающимися отрезками до тех пор, пока не останется ни одной пары точек, которые можно было бы соединить непересекающимися отрезками.

Каковы границы изменения числа отрезков в зависимости от расположения этих точек на плоскости?

Решение. Используя соотношение, полученное в ходе решения задачи 3, имеем (для графа, соответствующего данной задаче): $P = 2n + 3m - 3$.

По условию $m + n = 1000$. Тогда $P = 3(m + n) - n - 3$, откуда $P = 2997 - n$. Число n — число сторон многоугольника, поэтому $3 \leq n \leq 1000$. Максимальное значение P будет при минимальном значении n (т. е. при $n = 3$), а минимальное значение P будет при максимальном значении n (т. е. при $n = 1000$). Поэтому $1997 \leq P \leq 2994$.

Рассмотрим еще одну интересную теорему.

Теорема. Пусть на плоскости даны два множества точек:

$A = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ и $B = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$, где $n \geq 2$ и $m \geq 2$.

Соединим отрезками (или дугами) все возможные пары точек X_i ($2 \leq i \leq n$) и Y_j ($2 \leq j \leq m$) так, чтобы соединяющие их отрезки (или дуги), кроме этих точек, других точек пересечения не имели. Полученный граф будет иметь $m+n-2$ граней.

Доказательство. Граф, соответствующий условию теоремы, будет иметь только четырехугольные грани (рис. 67). Действительно, если предположить, что он имеет хотя бы одну треугольную грань, то из трех ее вершин две будут принадлежать одному и тому же множеству, что противоречит условию теоремы.

Аналогично можно доказать, что этот граф не может иметь грань с числом ребер больше четырех. В противном случае в нем не будут проведены все возможные дуги, соединяющие точки множества A и B .

Итак, все грани графа, соответствующего условию теоремы, четырехугольные. Тогда $4\Gamma = 2P$, или $P = 2\Gamma$.

С другой стороны, так как граф плоский, то имеет место соотношение $V - P + \Gamma = 2$.

Подставив в эту формулу значение $V = n + m$, получим: $\Gamma = 2 + 2\Gamma - (m + n)$, или $\Gamma = m + n - 2$.

Ясно, что в этом случае $P = 2(m + n - 2)$.

Задача 9. На летних сборах для разведки 20 объектов «противника» командир решил использовать наибольшее число бойцов. Сколько

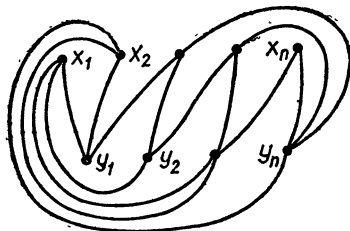


Рис. 67

отделений, по 5 бойцов в каждом, может использовать командир для учебной разведки этих 20 объектов, если каждому бойцу дается задание разведать только один объект и пути бойцов не должны пересекаться (кроме как в самом объекте). При этом каждый объект должен разведываться бойцами разных отделений.

Решение. Обозначим искомое число отделений через x ; тогда число бойцов будет $5x$.

Граф данной ситуации, согласно рассмотренной выше теореме, должен иметь $2(x+20-2)$ ребер.

Так как каждое ребро соответствует пути одного разведчика, можно составить уравнение:

$$5x = 2(x + 20 - 2),$$

откуда

$$x = 12.$$

8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ГРАФОВ

Рассмотрим некоторые задачи практического характера, решаемые с помощью теории графов. Если в процессе решения какой-либо из задач нам потребуется применить теорему, не рассмотренную ранее, мы приведем ее формулировку и примем без доказательства (доказательства этих теорем читатель может найти в литературе, указанной в конце этой книги).

Задача 1. На столе лежат 7 фишек. Два игрока A и B поочередно берут со стола либо одну, либо две фишки (по своему усмотрению). Побеждает тот из них, кто возьмет последнюю фишку. Как играть на выигрыш?

Решение. Для того чтобы наметить правильную стратегию игры, представим ситуацию задачи в виде графа (рис. 68).

Пусть на рисунке 68 параллельными прямыми изображены фишки, а точками на этих прямых обозначено (посредством букв A и B с индексами), какой игрок и в каком порядке берет ту или иную фишку.

Пусть точке O соответствует начальное положение игры.

Допустим, жеребьевкой установлено, что игрок A начинает первым. У него имеются две возможности: взять одну фишку (на рисунке 68 эта возможность изображена отрезком OA_1) или две (отрезок OA_2).

Игрок B своим первым ходом может взять также одну или две фишки из оставшихся (его возможности изображены пунктирными отрезками A_1B_1 , $A_1B'_1$, A_2B_2 , $A_2B'_2$).

Продолжая анализировать с помощью данного рисунка игру, получим изображение хода данной игры в виде осо-

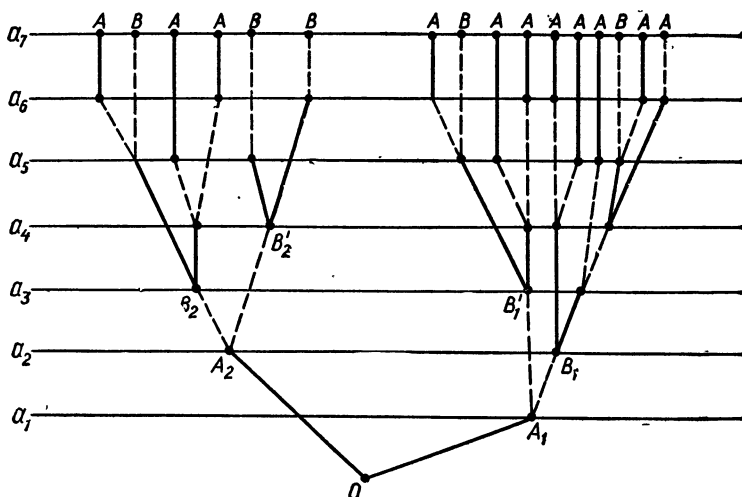


Рис. 68

бного графа, называемого деревом (в силу внешнего сходства).

Изучая дерево этой игры, нетрудно обнаружить, что игрок *A* может выбрать такую стратегию игры, при которой он победит независимо от того, как будет играть игрок *B*.

В самом деле, если игрок *A*, начиная игру, возьмет одну фишку (см. правую часть дерева, изображенного на рис. 68), то игрок *B* может взять одну или две фишки.

Пусть игрок *B* возьмет одну фишку, игрок *A* следующим ходом должен взять две фишки (если игрок *B* возьмет две фишки, то игрок *A* следующим ходом должен взять одну фишку).

Точно так же игрок *A* продолжает играть дальше: на выбор игроком *B* одной фишки он отвечает выбором двух фишек и наоборот.

При такой стратегии игры игрок *A* обязательно выигрывает.

Если игрок *A* первым ходом возьмет две фишки, игрок *B* может сыграть так, чтобы выиграть.

Итак, правильная стратегия игры на выигрыш требует начинать игру первым и играть так, как это описано выше.

Данная задача легко допускает обобщение.

Пусть на столе лежат $M = p + (m + n)k$ фишек, где m и n соответственно обозначены минимальное и максимальное числа фишек, которые разрешается взять сразу (одним ходом); k — произвольное натуральное число, а p — натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$m \leq p \leq n.$$

В рассмотренной выше задаче $M = 7$, $m = 1$, $n = 2$, $p = 1$, $k = 2$, $7 = 1 + (1 + 2) \cdot 2$.

Легко показать, что в этом случае игрок, начинающий игру, также может выбрать такую стратегию, чтобы обязательно выиграть.

В самом деле, пусть игрок A начинает игру и своим первым ходом берет p фишек. Пусть игрок B следующим ходом возьмет r фишек ($m \leq r \leq n$). Тогда игрок A вторым ходом должен взять q фишек так, чтобы $r + q = m + n$ (что всегда возможно). Продолжая игру так, как это указано выше, игрок A обязательно выигрывает.

Проиллюстрируйте самостоятельно описанную выше стратегию игры для случая, когда $p = 6$, $m = 5$, $n = 8$, $k = 2$. Проиллюстрируйте эту стратегию для любого числа фишек M , удовлетворяющего выше указанным условиям.

Задача 2. Известно, что при составлении экипажа космических кораблей предусмотрена обязательная психологическая совместимость всех его членов. Пусть подбирается экипаж космического корабля из трех человек: командира, инженера и врача. Имеются четыре кандидата на должность командира (a_1, a_2, a_3, a_4), три кандидата на должность инженера (b_1, b_2, b_3) и три — на должность врача (c_1, c_2, c_3). Специальные испытания показали:

а) командир a_1 психологически совместим с инженерами b_1 и b_3 и врачами c_2 и c_3 ;

б) командир a_2 психологически совместим с инженерами b_1 и b_2 и всеми врачами;

в) командир a_3 психологически совместим с инженерами b_1 и b_2 и врачами c_1 и c_3 ;

г) командир a_4 психологически совместим со всеми инженерами и врачом c_2 .

Кроме того, инженер b_1 психологически несовместим с врачом c_3 ; инженер b_2 — с врачом c_1 ; инженер b_3 — с врачом c_2 .

Сколькими способами при этих условиях может быть составлен экипаж космического корабля?

Решение. Составим графы по условию данной задачи: вершинами графа изобразим тех или иных специалистов (сохранив те же обозначения); в качестве ребер графа выступит совместимость специалистов, отмеченная в условии задачи; отсутствие ребра у того или иного графа означает, что соответствующая пара людей психологически несовместима.

Получим четыре графа, указанные на рисунке 69. Нетрудно усмотреть из рисунка, что искомое число возможных экипажей космического корабля будет равно числу треугольников с вершинами в точках a_i, b_j, c_k , где $i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3$.

Искомые сочетания специалистов: $(a_1, b_1, c_2), (a_1, b_3, c_3), (a_2, b_1, c_1), (a_2, b_1, c_2), (a_2, b_2, c_2), (a_2, b_2, c_3), (a_3, b_1, c_1), (a_3, b_2, c_3), (a_4, b_1, c_2), (a_4, b_2, c_2)$.

Задача 3. Доказать, что среди любых шести человек всегда найдутся трое попарно знакомых друг с другом или трое попарно друг с другом не знакомых.

Решение. Составим граф по условию данной задачи. Точками обозначим людей. Если две точки соединены сплошным отрезком, то соответствующая им пара людей знакомы друг с другом; если две точки соединены штриховым отрезком, то соответствующая им пара людей не знакомы друг с другом. Приняв эти обозначения, получим полный граф, имеющий 6 вершин (рис. 70).

Так как степень каждой вершины графа равна 5, то ясно, что в каждой вершине графа сходится три или более чем три сплошных отрезка (ребра графа), либо три или более чем три отрезка штриховых. Пусть из вершины B графа выходит 3 сплошных отрезка: BC, BD и BK . Если какую-либо пару точек из точек C, D и K соединить сплошным отрезком, то возникнет треугольник, все стороны которого являются сплошными отрезками. Последнее означает, что среди данных 6 человек трое окажутся попарно знакомы друг с другом. Если же ни одна пара из этих точек не соединена сплошным отрезком, то окажется, что точки C, D и K являются вершинами треугольника, стороны которого изображены штриховыми отрезками. Но тогда это означает, что среди данных 6 человек трое окажутся попарно незнакомы друг с другом.

Задача 4. На кирпичном заводе имеется 4 печи для обжига кирпичей. После обжига кирпичи грузятся на специальную вагонетку и перевозятся к одной из четырех

платформ, с которых их погружают на автотранспорт.

Каждая из четырех печей должна быть связана рельсовым путем с каждой из четырех погрузочных платформ. Требуется установить минимальное число пересечений рельсовых путей.

Решение. Задача легко решается, если к ее решению применить следующую теорему: «Пусть два ребра графа пересекаются не более чем в одной внутренней точке. Тогда число внутренних пересечений ребер, соединяющих каждую из m вершин графа с каждой из n других его вершин, не менее чем:

а) $(r^2 - r)(s^2 - s)$, если $m = 2r$, $n = 2s$, т. е. если числа m и n оба четные;

б) $(r^2 - r)s^2$, если $m = 2r$, $n = 2s + 1$;

в) $r^2(s^2 - s)$, если $m = 2r + 1$, $n = 2s$;

г) r^2s^2 , если $m = 2r + 1$, $n = 2s + 1$ ».

Не доказывая здесь эту теорему, применим ее к решению данной задачи. По условию имеем $m = n = 4 = 2 \cdot 2$; тогда $r = s = 2$.

Применив первое из заключений теоремы, получим возможное минимальное число пересечений рельсовых путей $(2^2 - 2)(2^2 - 2) = 4$. На рисунке 71 показан один из вариантов возможного расположения рельсовых путей (печи для обжига обозначены точками O_1, O_2, O_3 и O_4 ; платформы — буквами P_1, P_2, P_3 и P_4).

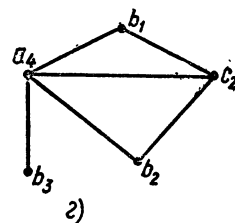
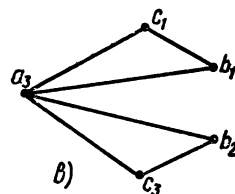
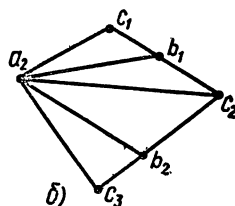
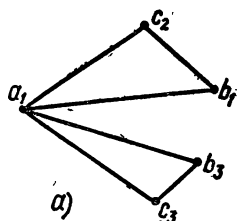


Рис. 69

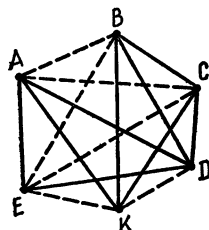


Рис. 70

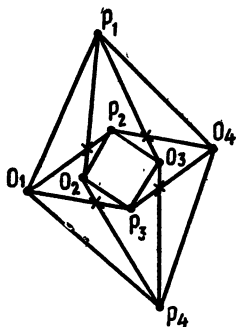


Рис. 71

Задача 5. Комсомольская организация завода, состоящая из n^k комсомольцев (n, k — натуральные числа, $n > 1$), решила установить дежурство в заводском клубе. Было предложено дежурить по n комсомольцев, причем так, чтобы каждые двое дежурили вместе только один раз.

Какое максимальное число дежурных комсомольских групп можно составить? Вычислить при $n=4, k=2$.

Решение. Пусть каждому дежурному соответствует вершина полного графа, а совместному дежурству двух человек — ребро, соединяющее две его вершины. Ясно, что число вершин этого графа равно n^k . Чтобы число дежурных групп было максимальным, необходимо, чтобы любые два комсомольца дежурили вместе; следовательно, граф этой ситуации является полным. С другой стороны, так как в каждой дежурной группе должно быть n комсомольцев, то каждой дежурной группе будет соответствовать один полный граф, число вершин которого равно n , а число ребер — $\frac{n(n^k-1)}{2}$.

Таким образом, граф, соответствующий условиям задачи, имеет максимальное число ребер, равное $\frac{n^k(n^k-1)}{2}$.

Очевидно, что максимальное число дежурных групп R будет равно $\frac{n^k(n^k-1)}{n(n-1)}$.

В частности, при $n=4, k=2$ получим $R=20$.

Задача 6. Пусть имеется множество, содержащее четное число людей, никакие трое из которых не имеют равного числа знакомых среди остальных людей этого множества.

Какова численность данного множества людей, если наименьшее число пар знакомых друг с другом равно 300?

Решение этой задачи основано на следующей теореме (приводимой нами без доказательства): «Если степени никаких трех вершин некоторого графа не равны

между собой, то наименьшее число ребер этого графа P выразится формулой

$$P = \begin{cases} \frac{n(n-2)}{8}, & \text{если } n - \text{число четное,} \\ \frac{n^2-1}{8}, & \text{если } n - \text{число нечетное.} \end{cases}$$

На основании этой теоремы (считая, что людям соответствуют вершины графа, а знакомству между какими-либо двумя из них — ребра, соединяющие соответствующую пару вершин) имеем:

$$\frac{n(n-2)}{8} = 300; \text{ откуда } n^2 - 2n - 2400 = 0.$$

Решив это уравнение, получим $n=50$ (так как $n=-48$ не удовлетворяет условию $n>0$). Итак, данное множество людей состоит из 50 человек.

Задачи и упражнения

22. На какое наибольшее число частей разбивается плоскость при пересечении двух треугольников?

23. На какое наибольшее число частей разбивается плоскость при пересечении двух четырехугольников?

24. При пересечении четырехугольника и треугольника плоскость разбивается самое большее на 8 частей. Каково наибольшее число точек пересечения, которые могут иметь эти фигуры?

25. В некотором выпуклом многоугольнике можно провести самое большее 13 непересекающихся диагоналей, которыми этот многоугольник разбивается на 14 треугольных областей. Сколько сторон имеет этот многоугольник?

26. Докажите, что каждый n -угольник разбивается на $n-2$ треугольника, если в нем провести все непересекающиеся диагонали.

27. На плоскости дано n окружностей так, что любые две из них пересекаются и никакие три не проходят через одну точку. На сколько частей разбивают плоскость эти n окружностей?

28. На какое наибольшее число областей разделит плоскость выпуклый n -угольник, пересекающийся с окружностью?

29. m -угольник расположен в n -угольнике; соединены отрезками всевозможные их вершины и, кроме этих точек,

других точек пересечения у этих отрезков нет. На сколько областей разделится при этом плоскость?

30. На плоскости дано n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку.

а) В скольких точках пересекаются эти прямые?

б) Найдите число прямых, если число замкнутых областей равно 21.

31. Даны три концентрические окружности и на них взяты соответственно m , n и k точек. Эти точки соединены отрезками (или дугами) так, что других точек пересечения (кроме данных точек) друг с другом они не имеют. На какое максимальное число треугольных областей разобьется эта фигура?

32. Для проверки боеготовности «противника» командир составил n отделений по одинаковому числу бойцов в каждом, которые должны были разведать m объектов противника. Каждый из бойцов должен был разведать по одному объекту противника, при этом никакие два из них при разведывании одного и того же объекта не должны быть из одного и того же отделения. Найдите максимальное число разведчиков, если пройденные ими пути не пересекались.

33. Внутри треугольника взято m точек, которые соединены друг с другом и вершинами треугольника. Докажите, что число треугольников образующегося графа четное.

9. ПРОБЛЕМА ОКРАСКИ КАРТЫ

Кажется, нет ничего проще, чем раскрасить политическую контурную географическую карту. Для этого достаточно окрасить одну из изображенных на ней стран, а затем граничащие с ней страны окрашивать в другой цвет.

Однако, если ограничить число цветов, которые при этом можно использовать, задача значительно усложняется.

Еще более сложной будет задача об определении по чистой контурной карте минимального числа цветов, с помощью которых можно правильно раскрасить данную карту.

Это весьма интересная математическая задача топологического характера, имеющая практическое применение.

Аналогичные задачи возникают при раскрашивании тканей, составлении различных рисунков паркетного пола, декоративных панно и т. д.

Задача раскрашивания карты различным числом красок привлекала внимание многих математиков. Так, в 1879 г. английский математик А. Кели на заседании английского географического общества высказал гипотезу о том, что любую географическую карту можно раскрасить четырьмя красками так, что соседние страны будут окрашены в разные цвета. Но подтвердить или опровергнуть эту гипотезу до сих пор никому не удалось. Однако при попытках решить эту задачу математики сумели решить ряд других задач, связанных с раскрашиванием карты.

Рассмотрим проблему окраски карты подробнее.

Каждую географическую карту можно представить себе как некоторый плоский граф. Территории стран в этом случае будут служить гранями графа, границы стран — ребрами графа, а точки пересечения границ — вершинами графа.

Кроме того, будем считать, что каждая страна на карте представлена единой связной областью.

Теорема 1. Любая карта на плоскости имеет по крайней мере одну грань, число ребер которой меньше 6.

Прежде чем доказать теорему, заметим, что при $\rho(x_i) \geq 3$ каждый плоский граф (рис. 72) можно преобразовать так, чтобы степень любой его вершины была равной 3¹.

Это можно выполнить следующим образом: те вершины, степень которых больше 3, принять за центры окружно-

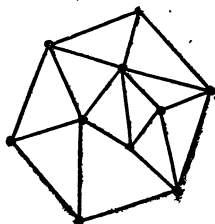


Рис. 72

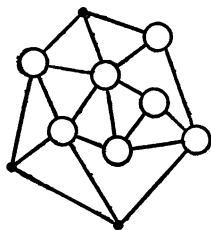


Рис. 73

¹ Можно считать, что плоский граф, соответствующий данной карте, не содержит вершин со степенью два, так как два сходящихся в ней ребра можно объединить в одно, не изменив схемы раскрашивания карты.

стей и начертить эти окружности. Для вновь полученного графа возникшие круги также будут гранями (рис. 73). Легко заметить, что степень любой вершины вновь полученного графа будет равна 3.

Подобные карты называют *нормальными картами*.

Переходя к доказательству вышеуказанной теоремы, введем следующие обозначения:

Γ_i — число всех тех граней, каждая из которых граничит с i областями;

B — число вершин графа;

P — число ребер;

Γ — число всех граней графа.

Рассмотрим доказательство этой теоремы для случая, когда карта нормальная.

Поскольку такая карта есть однородный граф, можем написать:

$$3B = 2P. \quad (1)$$

С другой стороны:

$$2P = 2\Gamma_2 + 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + \dots, \quad (2)$$

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \dots. \quad (3)$$

Пользуясь теоремой Эйлера, можем записать:

$$6B - 6P + 6\Gamma = 12. \quad (4)$$

Из равенств (1), (2), (3), (4) получаем:

$$12 = 4\Gamma_2 + 3\Gamma_3 + 2\Gamma_4 + \Gamma_5 - (\Gamma_7 + 2\Gamma_8 + \dots). \quad (5)$$

Равенство (5) показывает, что $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ одновременно не могут быть равны нулю; это и доказывает теорему.

Эта теорема верна и для случая, когда граф, изображающий карту, неоднородный. В этом случае $3B \leq 2P$; с другой стороны, предположив, что все грани имеют больше пяти ребер, получим $6\Gamma \leq 2P$. Откуда $B < \frac{2}{3}P$ и $\Gamma < \frac{1}{3}P$.

Подставляя найденные границы значений B и Γ в формулу $B - P + \Gamma = 2$, получим:

$$2 = B - P + \Gamma \leq \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}P - P = 0, \text{ т. е. } 2 \leq 0.$$

Это противоречие доказывает теорему.

Теорема 2 (о двух красках). Для того чтобы карту можно было раскрасить только двумя красками, необходимо и достаточно, чтобы в каждой вершине изображающего ее графа сходились четное число границ (ребер).

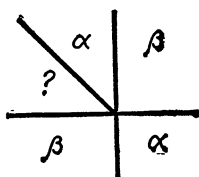


Рис. 74

Необходимость этого условия очевидна, так как если в какой-либо вершине карты сходятся нечетное число границ, то ее невозможно раскрасить двумя красками (рис. 74).

Для доказательства достаточности условия теоремы применим метод математической индукции по числу ребер (границ)¹.

Предположим, что граф, изображающий карту, имеет $n + 1$ ребер (границ) и что степени всех вершин графа четные. Если мы будем двигаться из любой вершины A графа в любом направлении, то, пройдя конечное число вершин, вернемся в вершину A . При этом пройденный путь будет циклом (простым).

Если удалить этот цикл, то получится новый граф, степени всех вершин которого будут также четными и число ребер которого меньше $n + 1$. По допущению индукции этот новый граф можно раскрасить двумя красками.

Если мы теперь восстановим удаленный ранее цикл, то получим первоначальный граф.

Изменив каждый из цветов по одну сторону восстановленного цикла на другой из двух данных (например, внутри цикла), получим раскраску карты двумя красками (рис. 75).

¹ Здесь и всюду первый шаг индукции проведите самостоятельно.

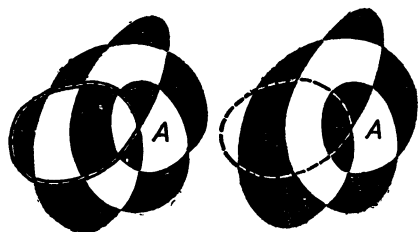


Рис. 75

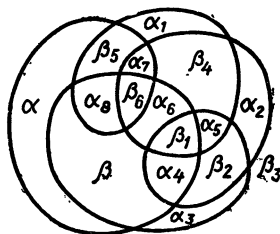


Рис. 76

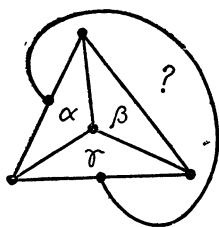


Рис: 77

Практически окрасить подобную карту можно так: сначала окрасить одну ее область, затем окрасить тем же цветом все области, имеющие с ней только одну общую точку. После этого окрасить другим цветом область, имеющую с первоначальной общую границу (ребро), и продолжить раскрашивание так же, как и в первом случае (на рис. 76 порядок раскрашивания двумя цветами α и β указан их индексами).

Не следует начинать окраску карты одновременно с двух мест, так как «стыковка» окрашенных областей может не получиться.

Теорема 3 (о трех красках). Для того чтобы нормальная карта могла быть раскрашена только тремя красками, необходимо и достаточно, чтобы каждая грань изображающего ее графа имела четное число ребер.

Необходимость условия очевидна. Если граф имеет грань, которая граничит с нечетным числом граней, то трех красок будет недостаточно (рис. 77).

Для доказательства достаточности условия теоремы применим метод математической индукции.

Согласно условию теоремы граф данной карты должен иметь грани, которые граничат с четным числом граней.

Из теоремы 1 следует, что грань, граничащая с двумя (или с четырьмя) гранями, существует.

Рассмотрим следующие случаи:

1. Пусть граф имеет грань α , которая граничит только с двумя гранями α_1 , α_2 (рис. 78). Пусть этот граф имеет $n+1$ грань. Если удалить общее ребро (границу) граней α и α_1 , то получится новый граф, который имеет n граней.

По допущению индукции этот новый граф (карту) можно раскрасить тремя различными цветами.

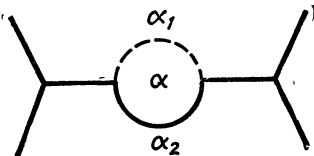


Рис. 78

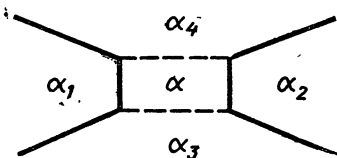


Рис. 79

Если теперь мы восстановим удаленное ранее ребро (границу), окажется, что α и α_1 будут окрашены одним цветом.

Если мы теперь окрасим область α цветом, отличным от цвета областей α_1 и α_2 , то вся карта будет раскрашена тремя разными цветами.

2. Покажем, что если граф имеет вид, изображенный на рисунке 79, то трех цветов для его окраски также будет достаточно.

Заметим, что согласно условию никакие четыре грани друг с другом одновременно граничить не могут; в противном случае возникнет грань, которая будет граничить только с тремя гранями, а это противоречит условию теоремы. Значит, в таком графе не могут граничить α_1 с α_2 и α_3 с α_4 .

Удалив границы граней α и α_3 , α и α_4 , получим новый граф, число граней которого будет на две меньше числа граней первоначального графа.

По допущению индукции новый граф можно раскрасить тремя различными цветами. При этом окажется, что α_1 и α_2 будут покрашены в один цвет, а α , α_3 и α_4 — в другой, т. е. будут использованы только два цвета.

Если теперь восстановить удаленные ребра (границы), а грань α окрасить третьим цветом, то весь граф окажется окрашенным тремя различными красками.

Теорема 4 (о пяти красках). Любую нормальную карту можно раскрасить пятью разными красками.

Действительно, согласно теореме 1 любой плоский граф будет иметь грань, которая граничит менее чем с шестью гранями.

Покажем, что во всех возможных случаях ($\Gamma_2 \neq 0$, $\Gamma_3 \neq 0$, $\Gamma_4 \neq 0$, $\Gamma_5 \neq 0$) пяти цветов будет достаточно для раскрашивания всей карты.

С л у ч а й I. Предположим, что граф, изображающий карту с числом граней $n+1$, имеет грань α , которая граничит только с двумя гранями (α_1 и α_2) (рис. 78).

Если удалить границу между α и α_1 , то получится новый граф, который будет иметь n граней. По допущению индукции этот граф можно раскрасить пятью цветами, однако при этом α и α_1 будут окрашены в один цвет.

Если теперь восстановить удаленное ранее ребро и грань α окрасить цветом, отличающимся от цветов α_1 и α_2 ,

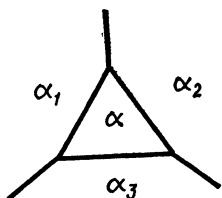


Рис. 80

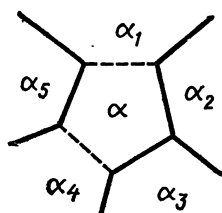


Рис. 81

то вся карта окажется окрашенной (не более чем) пятью различными цветами.

С л у ч а й II. Предположим, что граф с числом граней $n+1$ имеет грань α , которая граничит с тремя гранями α_1 , α_2 и α_3 (рис. 80).

Если удалить общее ребро граней α и α_1 , то получится новый граф с числом граней n . По допущению индукции этот граф можно раскрасить пятью цветами. При этом α и α_1 будут окрашены в один цвет.

Если теперь восстановить общее ребро граней α и α_1 , а грань α окрасить цветом, отличающимся от цветов α_1 , α_2 , α_3 , то окажется, что пяти цветов также будет достаточно для раскрашивания всей карты.

С л у ч а й III. Предположим, что граф с числом граней $n+1$ имеет грань α , которая граничит с четырьмя гранями α_1 , α_2 , α_3 и α_4 (рис. 79).

Легко заметить, что из четырех граней (α_1 , α_2 , α_3 и α_4), граничащих с гранью α , найдется по крайней мере две грани, которые не граничат между собой (в противном случае на плоскости можно было бы изобразить пять граничащих между собой граней, что невозможно. Этот факт впервые установил немецкий математик Мебиус в 1840 г.). У нас такими гранями будут грани α_3 и α_4 .

Если удалить общие ребра граней α и α_3 , а также α и α_4 , то получится новый граф с числом граней $n-1$.

По допущению индукции его можно раскрасить пятью цветами, однако при этом грани α , α_3 и α_4 окажутся окрашенными в один цвет, а α_1 и α_2 — в разные цвета.

Если восстановить удаленные ранее ребра и покрасить α четвертым цветом, то весь граф окажется раскрашенным в пять цветов.

С л у ч а й IV. Предположим, что граф имеет $n+1$ грань и одна из них α граничит с пятью другими гранями

($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ и α_5) (рис. 81). В этом случае хотя бы две грани (например, α_1 и α_4) не будут граничить между собой.

Удалив общие ребра граней α и α_1 , а также α и α_4 , мы получим граф с числом граней $n-1$.

По допущению индукции этот новый граф можно раскрасить пятью красками; при этом грани α , α_1 и α_4 будут окрашены в один цвет, а α_2, α_3 и α_5 — в разные цвета.

Если теперь восстановить удаленные ранее ребра и грани α окрасить пятым цветом, то весь граф окажется окрашенным в пять цветов.

Итак, в результате рассмотрения этих четырех случаев теорема о пяти красках доказана. Однако практически установлено, что многие карты можно раскрашивать с помощью четырех красок. Напомним, что до сих пор никому не удалось доказать этот факт или опровергнуть его.

Как уже было сказано ранее, с задачей окрашивания карты тесно связаны задачи о выкладывании мозаики и паркета. В связи с этим, естественно, возникает вопрос о том, какими фигурами (одинаковыми или различными или в их сочетании) можно покрыть плоскость (настелить паркетный пол).

Здесь мы рассмотрим только один из этих вопросов — вопрос о возможности покрыть плоскость одноименными многоугольниками при условии, что в каждой вершине сходится одинаковое число ребер (сторон).

Предположим, что вся плоскость покрыта однородным графом, степень каждой вершины которого m , а грани которого — одноименные n -угольники.

Выясним, при каких значениях m и n такое покрытие имеет место.

Обозначим через P число ребер этого графа, Γ — число его граней, B — число его вершин.

Тогда $mB=2P$, $n\Gamma=2P$, откуда $mB=n\Gamma$. Подставив в формулу Эйлера ($B+\Gamma-P=2$) $B=\frac{n\Gamma}{m}$ и $P=\frac{n\Gamma}{2}$, получим:

$$\Gamma = \frac{4m}{2m + 2n - nm}. \quad (1)$$

Так как данный однородный граф покрывает всю плоскость, то множество его граней бесконечно. Грубо говоря,

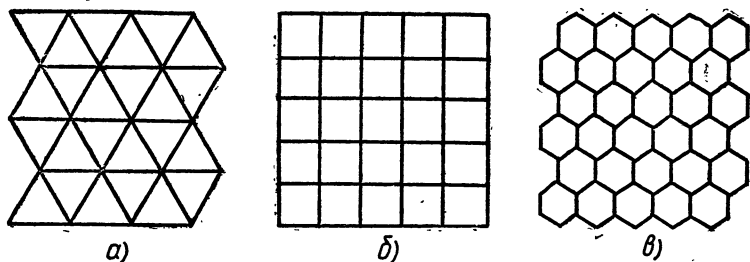


Рис. 82

можно считать, что выражение $2m + 2n - nm \rightarrow 0$. Для упрощения примем $2m + 2n - nm = 0$. Преобразуя последнее равенство, получим:

$$(m-2)(n-2) = 4. \quad (2)$$

Найдем подбором натуральные значения m и n , удовлетворяющие равенству (2): $m_1 = 3$ и $n_1 = 6$; $m_2 = 4$ и $n_2 = 4$; $m_3 = 6$ и $n_3 = 3$. Ясно, что других значений m и n , кроме найденных, быть не может.

Итак, если данный однородный граф покрывает всю плоскость, то грани его либо треугольники, либо четырехугольники, либо шестиугольники (рис. 82 а, б, в).

Отсюда следует, что для того, чтобы однородным графом можно было покрыть всю плоскость, он должен иметь грани или треугольные, или четырехугольные, или шестиугольные.

Если степени вершин однородного графа равны трем, то всю плоскость можно покрывать только шестиугольниками; если степени вершин равны четырем, то грани его должны быть четырехугольниками; если степени вершин равны шести, то все его грани должны быть треугольниками.

Задачи и упражнения

34. В плоскости начерчены n окружностей. Докажите, что карту, образующуюся при их пересечении, можно раскрасить двумя цветами.

35. Карту, образующуюся при проведении на плоскости n прямых, можно раскрасить двумя цветами. Докажите.

36. Докажите, если на плоскости взяты n треугольников, то образующую карту можно раскрасить в два цвета.

37. Нарисуйте такую карту, чтобы для ее раскрашивания потребовалось только три цвета.

38. Сколько цветов потребовалось бы для раскрашивания карты-схемы Московского метрополитена?

39. Докажите, что любой уникурсальный граф с четными степенями всех вершин можно раскрасить двумя цветами.

40. Как окрасить грани куба тремя данными красками?

41. Покажите, что на торе можно начертить карту, для раскрашивания которой четырех цветов недостаточно.

10. МНОГОГРАННИКИ

Многогранники, известные вам из курса геометрии, принадлежат к числу многогранников, называемых простыми.

Многогранник называется *простым*, если его каким-либо образом можно деформировать в сферу.

Рассмотренная ранее теорема Эйлера имеет место и для простых многогранников. Проверим ее справедливость для правильных многогранников:

а) для тетраэдра (рис. 83, а): $4 + 4 - 6 = 2$;

б) для куба (рис. 83, б): $8 + 6 - 12 = 2$;

в) для додекаэдра (рис. 83, в): $20 + 12 - 30 = 2$;

г) для октаэдра (рис. 83, г): $6 + 8 - 12 = 2$;

д) для икосаэдра (рис. 83, д): $12 + 20 - 30 = 2$.

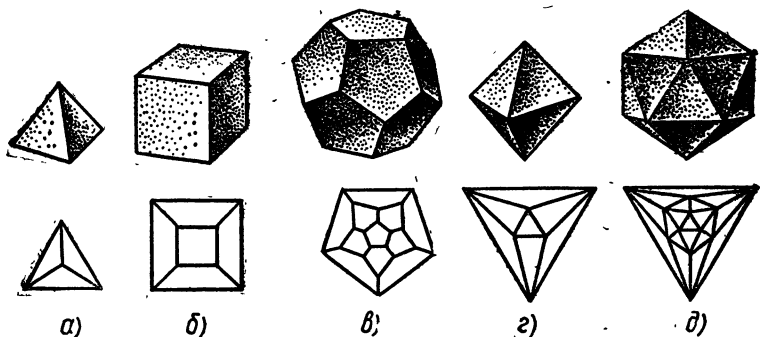


Рис. 83

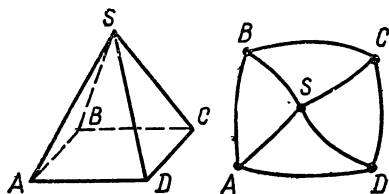


Рис. 84

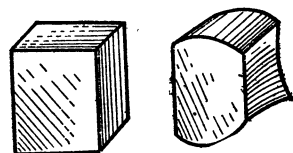


Рис. 85

Убедиться в справедливости этой теоремы для любого выпуклого многогранника можно с помощью следующего рассуждения. Удалим одну из граней данного многогранника и, мысленно деформируя его (например, растягивая), сделаем частью плоскости (рис. 84). Получится плоский граф с тем же числом вершин и ребер, что и данный многогранник; число же граней графа будет на единицу меньше числа граней данного многогранника.

Поскольку ранее было доказано, что теорема Эйлера имеет место для плоского графа (учитывая его внешнюю грань), то эта теорема имеет место и для данного многогранника.

С помощью теоремы Эйлера мы можем показать, что существует пять и только пять различных топологически правильных многогранников.

Заметим, что многогранник называют *топологически правильным*, если из всех его вершин исходит одинаковое число ребер и каждая грань имеет одинаковое число ребер (рис. 85).

Пусть B — число вершин, Γ — число граней и P — число ребер произвольного выпуклого многогранника.

Допустим, что из каждой вершины многогранника исходит по q ребер и каждая грань имеет r сторон. Тогда

$$Bq = 2P = \Gamma r. \quad (1)$$

Преобразуя равенство (1), используя формулу Эйлера, получим:

$$\frac{B}{\frac{1}{q}} = \frac{P}{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma}{\frac{1}{r}};$$

$$\frac{B - P + \Gamma}{\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{r}} = \frac{4qr}{2q + 2r - qr},$$

откуда

$$B = \frac{4r}{2q + 2r - qr},$$

$$P = \frac{2qr}{2q + 2r - qr},$$

$$Г = \frac{4q}{2q + 2r - qr}.$$

С другой стороны, поскольку B , P и $Г$ — натуральные числа, имеет место следующее неравенство:

$$2q + 2r - qr > 0, \quad (3)$$

или

$$(q-2)(r-2) < 4. \quad (4)$$

Решив неравенство (4), получим допустимые пары значений q и r : $(3, 3)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$, $(5, 3)$, $(3, 5)$.

Таким образом, существует только пять типов топологически правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр (на рис. 83 изображены названные многогранники и соответствующие им плоские графы).

Из теоремы Эйлера следует еще один интересный факт: не существует многогранника, у которого не было бы либо треугольных, либо четырехугольных, либо пятиугольных граней.

Важным и интересным вопросом теории многогранников является вопрос их классификации.

Так, все выпуклые многогранники считаются многогранниками нулевого рода. Существуют многогранники первого, второго и т. д. рода. Например, многогранник, изображенный на рисунке 86, является многогранником первого рода; он гомеоморфен тору (рис. 87).

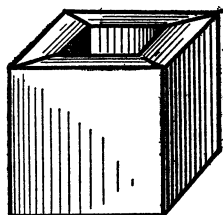


Рис. 86



Рис. 87

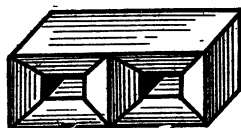


Рис. 88

Многогранник, изображенный на рисунке 88, является многогранником второго рода.

Нетрудно показать, что род многогранника равен числу сквозных отверстий, имеющих на нем. Иначе, если многогранник имеет p отверстий, то и род его равен p . В этом случае между числами его вершин V , ребер P и граней Γ имеет место следующее соотношение: $V - P + \Gamma = 2 - 2p$.

Так, для многогранника, изображенного на рисунке 86, имеем: $V = 16$, $P = 32$, $\Gamma = 16$. Подставив эти значения в формулу $V - P + \Gamma = 2 - 2p$, получим $16 - 32 + 16 = 2 - 2p$, откуда $p = 1$. В частности, если $p = 0$, получаем теорему Эйлера для простых многогранников ($V - P + \Gamma = 2$).

Число $2 - 2p$ называют *эйлеровой характеристикой многогранника*.

Задачи и упражнения

42. Для многогранника нулевого рода имеет место равенство $3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \dots = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots$. Докажите.

43. Докажите, что для всякого многогранника нулевого рода имеют место неравенства:

- а) $6\Gamma - 12 \geq 2P \geq 3\Gamma \geq P + 6$;
- б) $6V - 12 \geq 2P \geq 3V \geq P + 6$.

44. Докажите, что для любого простого многогранника нулевого рода имеют место следующие неравенства:

- а) $V_3 + \Gamma_3 \geq 8$;
- б) $3V_3 + 2V_4 + V_5 \geq 12$;
- в) $4V_3 + 2V_4 + \Gamma_3 \geq 20$;
- г) $4\Gamma_3 + 2\Gamma_4 + V_3 \geq 20$.

45. Докажите, что многогранник нулевого рода имеет, по крайней мере, одну треугольную грань (или, по крайней мере, один трехгранный угол).

46. Докажите, что не существует многогранника нулевого рода, каждая грань которого имеет более пяти сторон (или каждый многогранный угол которого имеет более пяти граней).

47. Некоторый многогранник нулевого рода имеет пять граней. Каким может быть число его вершин и число его ребер?

48. Любой многогранник нулевого рода, не имеющий ни четырехугольных, ни пятиугольных граней, имеет по крайней мере четыре треугольные грани. Докажите.

49. Докажите, что не существует многогранника, каждая грань которого имеет нечетное число сторон, а сам многогранник — нечетное число граней.

50. Докажите, что у любого многогранника число граней с нечетным числом сторон всегда четно (например, не может существовать 19-гранника, все грани которого являются треугольниками).

51. Докажите, что у любого многогранника число вершин, из которых выходит нечетное число ребер, четно.

52. У тетраэдра 6 ребер. Докажите, что многогранника с меньшим числом ребер не существует.

53. Докажите, что не существует многогранника, имеющего 7 ребер.

54. Докажите, что в любом односвязном многограннике имеют место соотношения: $\frac{3}{2} \leq \frac{P}{T} < 3$.

55. Докажите, что в любом односвязном многограннике сумма числа треугольных граней и числа трехгранных углов не меньше 8.

11. НА ПОДСТУПАХ К ТОПОЛОГИИ

Геометрия, изучаемая в школе, имеет дело почти исключительно со свойствами фигур, связанными с понятиями длины, величины угла, площади и объема. Такие свойства фигур называются *метрическими*. Лишь очень немногие теоремы и задачи школьного курса геометрии рассматривают свойства иного характера.

Например, решим следующую задачу. Сколько диагоналей можно провести в выпуклом десятиугольнике?

Если мы будем решать эту задачу непосредственно, т. е. проведем в данном многоугольнике все возможные диагонали (рис. 89) и попытаемся их пересчитать, то увидим, что это сделать совсем непросто. Еще труднее под-

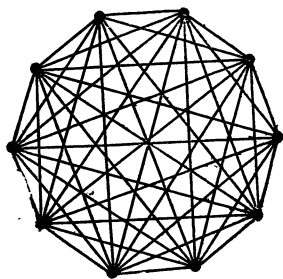


Рис. 89

считать число всех диагоналей у невыпуклого многоугольника.

Представим, что все диагонали многоугольника — эластичные тесемки, прикрепленные в соответствующих вершинах. Тогда каждую диагональ можно было бы поднять в пространство, например, следующим образом: вторую диагональ поднять чуть выше, чем первую; третью поднять еще чуть выше, чем вторую, и т. д. При этом диа-

гонали не пересекались бы и мы могли бы без труда их пересчитать. От натяжения тесемок изменились бы их длины, величины некоторых углов и т. п., а число диагоналей (тесемок) осталось тем же самым.

Но для решения этой задачи такие изменения элементов фигуры значения не имеют. Здесь мы сталкиваемся с геометрическим свойством, которое не является метрическим.

Топология и является разделом геометрии, изучающим свойства фигур, которые могут быть установлены без измерения и сравнения длин и величин углов и которые тем не менее имеют вполне геометрический характер.

Топология как раздел геометрии по существу в школьном курсе не представлена. Лишь отдельные задачи скрыто опираются на топологические свойства фигур (например, вышеупомянутая задача на определение числа всех диагоналей выпуклого многоугольника). Однако определенные связи между элементарной геометрией и топологией установить возможно. Мы попытаемся здесь рассмотреть некоторые вопросы топологии, исходя из понятий, встречающихся в школьном курсе геометрии. Более того, покажем, что стремление выявить наиболее глубокие геометрические свойства фигур необходимо приведет нас к идеям топологии.

Понятие геометрического преобразования является одним из основных в школьном курсе геометрии. Свойства фигур, которые сохраняются при данном преобразовании F , называются инвариантами этого преобразования. Например, свойство фигуры быть прямой является инвариантом центральной симметрии.

Рассмотрим теперь известные нам преобразования и их инварианты.

I. Центральная симметрия (рис. 90).

Нетрудно убедиться в том, что следующие свойства являются инвариантами этого преобразования.

1. Свойство фигуры быть прямой.

2. Свойство фигуры быть отрезком.

3. Свойство фигуры быть окружностью.

4. Свойство угла иметь данную величину.

5. Свойство фигуры иметь определенную площадь.

6. Свойство фигуры иметь определенную длину.

7. Свойство фигуры быть незамкнутой кривой.

8. Свойство фигуры быть замкнутой кривой.

II. Гомотетия (рис. 91, 92).

Сравнение свойств центральной симметрии и гомотетии показывает, что рассмотренные выше свойства 1, 2, 3, 4, 7, 8 являются также инвариантами гомотетии. Но свойства 5 и 6 при гомотетии не сохраняются.

Некоторые из этих свойств, такие, как свойства иметь определенную длину и площадь, являются инвариантами только одного из рассмотренных преобразований — центральной симметрии, в то время как свойства фигур быть замкнутой (или незамкнутой) линией являются инвариантами того и другого из рассмотренных преобразований: центральной симметрии и гомотетии.

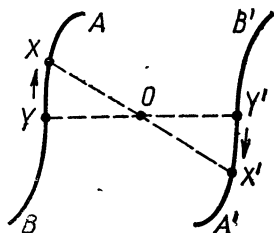


Рис. 90

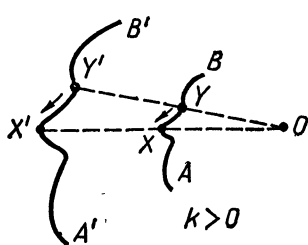


Рис. 91

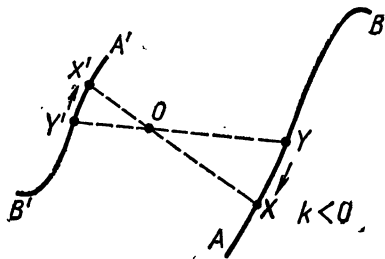


Рис. 92

Из нескольких геометрических свойств фигуры то считается более глубоким, которое оказывается более устойчивым, т. е. то, которое выдерживает большее количество преобразований, оставаясь неизменным.

Отсюда следует, что свойство фигуры быть замкнутой (незамкнутой) линией является, очевидно, более глубоким, чем свойство иметь определенную длину.

Несомненный интерес представляет вопрос о том, какие из геометрических свойств данной фигуры являются наиболее глубокими. Казалось бы, для того чтобы ответить на него, надо данную фигуру подвергнуть большому числу различных преобразований и посмотреть, какие из свойств фигуры являются инвариантами всех этих преобразований (или хотя бы большинства из них). Такие свойства и будут, очевидно, наиболее глубокими геометрическими свойствами данной фигуры.

Но можно поступить несколько иначе. Ведь если некоторое свойство является инвариантом данного преобразования, то оно будет являться инвариантом всех преобразований, которые являются частными случаями данного.

Например, преобразование центральной симметрии является частным случаем преобразования гомотетии. Нетрудно убедиться в том, что центральная симметрия — это гомотетия с коэффициентом $k = -1$. Поэтому все инварианты гомотетии будут являться и инвариантами центральной симметрии.

Действительно, рассмотренные выше свойства 1, 2, 3, 4, 7, 8, являясь инвариантами гомотетии, будут и инвариантами центральной симметрии. Обратное, разумеется, неверно. Так, свойства 5, 6, являясь инвариантами центральной симметрии, не будут инвариантами гомотетии.

Поэтому, вместо того чтобы подвергать данную фигуру большому числу различных преобразований, можно отыскать более общее преобразование, частными случаями которого являлись бы рассмотренные ранее преобразования.

Инварианты этого более общего преобразования будут являться инвариантами всех рассмотренных ранее преобразований.

Ответ на поставленный нами вопрос сводится, таким образом, к поиску соответствующего преобразования. Будем исходить из следующих соображений.

Рассмотренные ранее преобразования являются частными случаями искомого. Попытаемся выявить те общие

условия, которым удовлетворяет каждое из рассмотренных нами конкретных преобразований, и, таким образом, перейдем к характеристике искомого преобразования.

Эти условия найти нетрудно. Действительно, во-первых, оба рассмотренных преобразования являются взаимно однозначными (обратимыми), во-вторых, выполняется следующее условие: если зафиксировать произвольную точку X фигуры-прообраза и соответствующую ей точку X_1 (образ точки X при одном из известных нам преобразований) и рассмотреть переменную точку Y фигуры-прообраза вместе с точкой Y_1 — образом точки Y , то при неограниченном приближении точки Y к точке X точка Y_1 будет неограниченно приближаться к точке X_1 , и обратно, при неограниченном приближении точки Y_1 к точке X_1 точка Y будет неограниченно приближаться к точке X .

Преобразование, для которого выполняется это условие, называется *взаимно-непрерывным*.

Из сказанного выше следует, что искомым преобразованием будет, по-видимому, преобразование, являющееся взаимно-непрерывным и взаимнооднозначным. Преобразование, обладающее такими свойствами, называют *топологическим*.

Возникает вопрос о том, нельзя ли, идя по пути обобщения, рассмотреть еще более общие преобразования, которые являются лишь или взаимно однозначными, или взаимно-непрерывными и т. д.

Оказывается, что при преобразованиях более общих, чем топологические, не сохраняется такое фундаментальное геометрическое свойство, как размерность.

Не останавливаясь на строгом определении понятия размерности, укажем лишь, что точке приписывается размерность 0, линии — размерность 1, поверхности — размерность 2, пространству — размерность 3.

А сохраняется ли размерность при топологических преобразованиях? Оказывается, что сохраняется. Например, трехмерный куб нельзя топологически отобразить на квадрат. То, что размерность является топологическим инвариантом, было впервые доказано Л. Э. Брауэром в 1911 г.

Таким образом, топологические преобразования являются в некотором смысле наиболее общими преобразованиями, сохраняющими размерность. Инварианты топологических преобразований называются иначе *топологическими свойствами фигур*.

Например, свойство фигуры быть простой (т. е. без самопересечений), незамкнутой линией является топологическим свойством. Топологическое преобразование называется иначе *гомеоморфизмом*.

Фигуры F и F' называются *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм, переводящий фигуру F в фигуру F' .

Рассмотрим деформацию резинового листа. Нетрудно убедиться в том, что это преобразование является наглядным примером топологического преобразования.

Представим себе, что модель некоторой фигуры сделана из очень прочного и эластичного материала. Выясним, какие преобразования этой фигуры нельзя назвать топологическими.

Для этого будем исходить из определения топологического преобразования. Чтобы преобразование было топологическим, необходимо, во-первых, чтобы оно было взаимно однозначным. Отсюда следует, что не должно быть физического соприкосновения материала, из которого изготовлена модель фигуры, с самим собой. Во-вторых, преобразование должно быть взаимно-непрерывным, т. е. не должно происходить разрывов материала, из которого сделана модель фигуры. Определенные таким образом преобразования и называются деформацией.

Деформация — это такое преобразование модели фигуры, которое сводится к растяжению, сжатию, изгибанию, скручиванию; при этом две различные точки модели фигуры не должны приводиться в состояние физического соприкосновения друг с другом и не должно происходить разрывов тех частей модели фигуры, которые были соединены друг с другом.

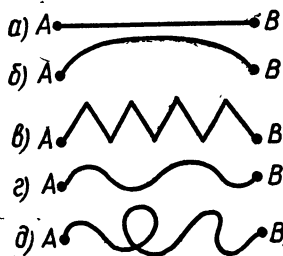


Рис. 93

Применим теперь деформацию к некоторым геометрическим фигурам. Очевидно, что с помощью деформации отрезок AB (рис. 93, а) можно преобразовать в дугу (рис. 93, б), в незамкнутую ломаную линию без самопересечений (рис. 93, в), в произвольную незамкнутую кривую линию без самопересечений (рис. 93, г), но нельзя преобразовать в кривую линию с самопересечением (рис. 93, д) или в

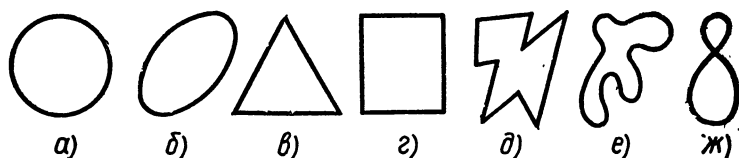


Рис. 94

окружность, так как для этого две различные ранее точки отрезка должны совместиться, что не допускается.

Окружность (рис. 94, а), в свою очередь, с помощью деформации можно преобразовать в овал (рис. 94, б), в треугольник (рис. 94, в), в квадрат (рис. 94, г), вообще в произвольный многоугольник без самопересечений (рис. 94, д), в произвольную замкнутую кривую без самопересечений (рис. 94, е), но нельзя преобразовать, например, в «восьмерку» (рис. 94, ж).

Далее, сферу (рис. 95, а) можно деформировать в картофелину (рис. 95, б), в куб (рис. 95, в), в форму ненакачанного мячика (рис. 95, г), в произвольный выпуклый многогранник, но нельзя деформировать, например, в тор (баранку) (рис. 96).

Тор можно деформировать в гирю (рис. 97, а), но нельзя деформировать в «крендель» (рис. 97, б) и т. д.

Отметим, что понятие топологического преобразования шире, чем понятие деформации. Например, если модель

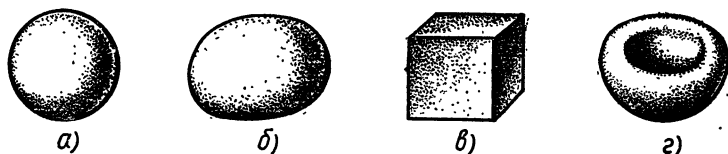


Рис. 95

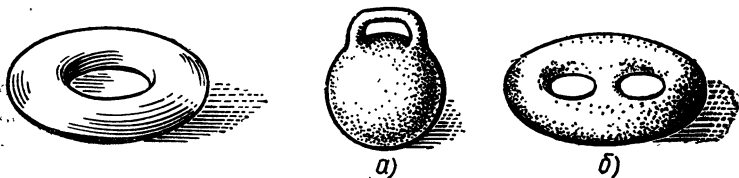


Рис. 96

Рис. 97

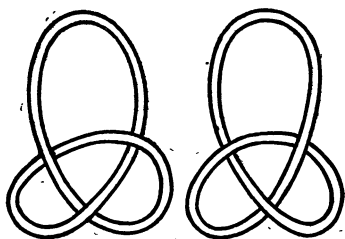


Рис. 98

фигуры разрезана до деформации и склеена по тем же линиям после деформации, то в итоге, несомненно, получается некоторое топологическое преобразование первоначальной фигуры, хотя это преобразование может и не быть деформацией.

Так, две фигуры, изображенные на рисунке 98, топологически эквивалентны друг

другу и эквивалентны каждой окружности (или кольцу), так как их можно разрезать, распутать и снова склеить, хотя без такого разреза невозможно одну кривую деформировать в другую.

Ранее нами были рассмотрены следующие фигуры: окружность, овал, треугольник, квадрат, произвольный многоугольник без самопересечений, произвольная замкнутая кривая без самопересечений. Все эти фигуры гомеоморфны между собой. Это означает, что для каждой пары существует гомеоморфизм, переводящий одну из них в другую.

По определению все топологические свойства у гомеоморфных фигур совпадают, поэтому для топологии, изучающей лишь топологические свойства, все гомеоморфные между собой фигуры представляют как бы различные экземпляры одного и того же топологического образа, как например все конгруэнтные между собой треугольники в школьном курсе геометрии.

В связи с этим и вводится понятие топологического типа. Для того чтобы две фигуры принадлежали одному и тому же топологическому типу, необходимо и достаточно, чтобы они были гомеоморфными.

Так, рассмотренные выше фигуры принадлежат одному топологическому типу; отрезок, дуга, незамкнутая ломаная — другому; «восьмерка» не принадлежит ни одному из этих типов. Сфера, куб, выпуклый многогранник образуют свой топологический тип и т. д.

Таким образом, одной из задач топологии является классификация фигур по топологическим типам, т. е. установление того, какие фигуры гомеоморфны между собой, а какие нет.

Задачи и упражнения

56. Можно ли посредством деформации линию, не имеющую самопересечений, преобразовать в линию, имеющую самопересечения?

57. Какие из свойств квадрата изменяются при его деформации; какие — остаются неизменными (инвариантами)? Почему иногда говорят, что квадрат более похож на окружность, чем окружность на кольцо?

58. Какие из фигур, изображенных на рисунке 99, гомеоморфны?

59. Какие буквы русского алфавита гомеоморфны букве Ж? Букве О? Какие фигуры гомеоморфны треугольнику? (Приведите примеры.)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы подошли к концу нашей небольшой книги. Надеемся, что уже на подступах к топологии вы сумели увидеть, насколько многообразен и интересен этот раздел математики. К некоторым понятиям топологии вы, читая эту книгу, подошли почти вплотную. От других её понятий вы по-прежнему далеки, так как для знакомства с ними необходимы знания из некоторых разделов математики, не рассматриваемых в школьном курсе.

Школьникам, чью любознательность авторы разбудили этой книжкой, и желающим начать знакомство с топологией в процессе решения занимательных задач, рекомендуем обратиться к следующим книгам.

1. Гарднер Мартин. Математические головоломки и развлечения. М., 1971.

2. Гарднер Мартин. Математические новеллы. М., 1974.

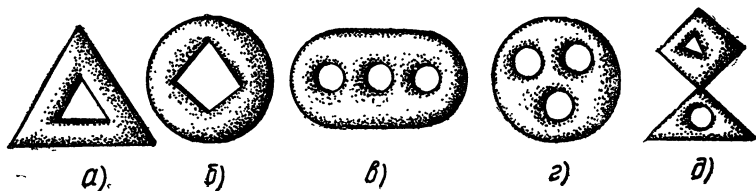


Рис. 99

3. Кэррол Льюис. История с узелками. М., 1973.
4. Дьюдени Генри Э. 520 головоломок. М., 1975.
5. Мартин Гарднер. Математические досуги. М., 1972.

Те же, кто заинтересуется топологией по-настоящему, могут попытаться познакомиться с более серьезной литературой.

1. Дынкин Е. Б. и Успенский В. А. Математические беседы. М.—Л., 1962.
2. Курант Р. и Робинс Г. Что такое математика. М., 1967.
3. Оре О. Графы и их применение. М., 1965.
4. Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. М., 1966.
5. Радемахер Г. и Теплиц О. Числа и фигуры. М., 1962.
6. Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Очерк основных идей топологии.— «Математическое просвещение». Под ред. Я. С. Дубнова и др. Вып. 2, 3, 4, 6, 1957—1961 гг.
7. Делоне Б. Н., Ефремович В. А. Что такое топология? — «Наука и жизнь», 1970, № 8.
8. Саати Т. Вариации на тему четырех красок.— В сб.: Проблемы современной математики. М., «Знание», 1975.

* *
*

Надеемся, что для тех и других читателей призыв «Познакомьтесь с топологией», поставленный в заглавие этой книги, послужит призывом к действию.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

1. У фигуры (графа), все вершины которой четные.
2. У фигуры (графа), среди вершины которой только две нечетные.
3. а), г), д). На рисунке 100 показан один из способов обхода фигуры з), см. рис. 10, стр. 8.
4. Действительно, если у графа, изображенного на рисунке 2 (стр. 4), удалить (или добавить) одно ребро, то полученный граф будет иметь только две нечетные вершины. А это означает, что он уникурсален.
5. Л, М, С и др.
6. 6 или 7 (на одном из них — начало движения, а на другом — конец движения).
7. а) 6; б) 2; в) 2.
8. 2 или 6 (если движение начато с перекрестка 2, то гараж находится на перекрестке 6, и наоборот).
9. 101.
10. 31.
11. 72. У к а з а н и е. Подставить значения $\Gamma=7$ и $P=77$ в формулу Эйлера.
12. 612 м (предполагается, что в пунктах А и В муфт нет).
13. 16 км 812 м.
14. 23 раза. У к а з а н и е. Использовать формулу $P-U=1$, где $P=24$.
18. Палец следует поставить так, чтобы любой луч, проведенный из точки соприкосновения пальца со столом, пересекался с нитью нечетное число раз.
19. У к а з а н и е. См. решение задачи 3 пункта «Лабиринты».
20. У к а з а н и е. Убедиться в уникурсальности графа соответствующего участка метрополитена.
21. 3 автобуса.
22. Контуры двух треугольников могут пересекаться самое большее в 6 точках. В этом случае $B=6+3+3=12$; тогда число

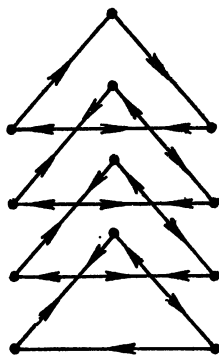


Рис. 100

ребер графа $P=18$ ($2P=2 \cdot 6 + 4 \cdot 6$). Подставляя эти значения B и P в формулу Эйлера, получим $\Gamma=8$.

23. 10 (см. решение задачи 22).

24. 6.

25. 16.

26. В каждом n -угольнике можно провести $n-3$ пересекающиеся диагонали. Используя формулу Эйлера, при $B=n$, $P=2n-3$, получим $\Gamma=n-1$. Так как при этом учитывалась внешняя область n -угольника, то число треугольных областей $\Gamma_3=\Gamma-1$, т. е. $n-2$.

27. Если предположить, что точки пересечения окружностей являются вершинами графа, то этот граф будет плоским. Число его вершин $B=n(n-1)$, а число ребер $P=2B$. Используя формулу Эйлера, получим $\Gamma=n(n-1)+2$.

28. $2n+2$. Указание. Окружность можно рассмотреть как m -угольник, где $m \geq n$.

29. $n+m+2$ областей; из них $m+n$ треугольников, один n -угольник, и один m -угольник.

30. а) $\frac{n(n-1)}{2}$ точек; б) 8 прямых. Указание. n прямых могут пересекаться самое большее в $\frac{n(n-1)}{2}$ точках; число отрезков, образующих замкнутые области, равно $n(n-2)$. Используя формулу Эйлера, найдем число граней $\Gamma = \frac{n^2-3n}{2} + 2$. Тогда число замкнутых областей будет $\frac{n^2-3n}{2} + 1$. Решая полученное уравнение $\frac{n^2-3n}{2} + 1 = 21$, найдем $n=8$.

31. $2n+m+k$ треугольных областей. Указание. Ситуации задачи соответствует плоский граф. Поэтому $B=n+m+k$, $P = \frac{3\Gamma_3 + m + k}{2}$, $\Gamma = \Gamma_3 + 2$. Далее используется формула Эйлера. (Предполагается, что соединяются точки, принадлежащие разным окружностям.)

32. $2(m+n-2)$ разведчиков. Указание. Воспользуйтесь решением задачи 8 в тексте раздела «Теорема Эйлера о плоском графе».

33. Из условия задачи следует, что выполняется соотношение: $2P=3\Gamma$, откуда Γ — число четное.

34. Указание. См. теорему «о двух красках».

35. Указание. См. теорему «о двух красках».

36. Указание. Доказать, что ситуации задачи соответствуют граф, степень каждой вершины которого четна; использовать теорему «о двух красках».

37. Указание. Достаточно изобразить такую карту (плоский граф), каждая область которой граничила бы с четным числом областей.

38. Указание. Считать Арбатскую и Филевскую линию за одну, применить теорему «о двух красках».

39. Указание. Применить теорему «о двух красках».

40. Противоположные грани окрашивать одинаковым цветом.

41. Один из способов указан на рисунке 101.

42. $2P = 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \dots$, и $2P = 3B_3 + 4B_4 + 5B_5 + \dots$, следовательно, $3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \dots = 3B_3 + 4B_4 + 5B_5 + \dots$.

43. Решение. а) Используя теорему Эйлера, получим: $6B - 6P + 6\Gamma = 12$, откуда $6\Gamma - 12 = 6P - 6B$. С другой стороны, имеем: $3B \leq 2P$, следовательно, $6\Gamma - 12 \geq 2P$.

Докажем, что $2P \geq 3\Gamma$. Действительно, $2P = 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \dots \geq 3\Gamma_3 + 3\Gamma_4 + 3\Gamma_5 + \dots = 3(\Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \dots) = 3\Gamma$. Итак, $2P \geq 3\Gamma$.

Наконец, докажем, что имеет место соотношение $3\Gamma \geq P + 6$. Действительно, $3B - 3P + 3\Gamma = 6$, откуда $3\Gamma = 3P - 3B + 6$. Подставив $2P \geq 3B$, получим $3\Gamma \geq P + 6$.

б) Доказывается аналогично а).

44. а) Из теоремы Эйлера имеем: $4B - 4P + 4\Gamma = 8$. Подставляя в это равенство значения

$$2P = 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \dots,$$

$$2P = 3B_3 + 4B_4 + 5B_5 + \dots,$$

$$B = B_3 + B_4 + B_5 + \dots,$$

$$\Gamma = \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \dots,$$

получим:

$$4(B_3 + B_4 + B_5 + \dots) - (3B_3 + 4B_4 + 5B_5 + \dots) - (3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \dots) + 4(\Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \dots) = 8,$$

откуда $B_3 + \Gamma_3 \geq 8$.

б) Указание. Обе части формулы Эйлера умножить на 6 и считать, что $4P \geq 6\Gamma$ (см. задачу 43, а).

в, г) Указание. Обе части формулы Эйлера умножить на 10 и подставить в нее соответствующие значения B , P и Γ .

45. (См. решение задачи 44, а).

46. Проведем доказательство методом от противного. Предположим, что существует такой простой многогранник, у которого число ребер каждой грани больше 5. Тогда имеет место следующая

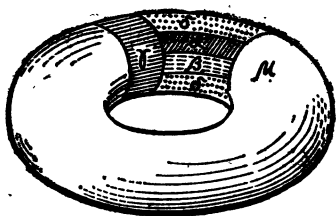


Рис. 101

щее неравенство $6\Gamma \leq 2P$ и $3B \leq 2P$. Подставив значения Γ и B в формулу Эйлера, получим:

$$\frac{2P}{3} - P + \frac{P}{3} \geq 2, \text{ или } 0 \geq 2. \text{ Получим противоречие.}$$

47. Решение. Так как $3\Gamma \leq 2P$, $P \geq \frac{15}{2}$ и P — натуральное число, то $P \geq 8$. С другой стороны, имеем: $3B \leq 2P$, или $B \leq \frac{2 \cdot 8}{3}$ откуда получим: $B \leq 5$. Так как B есть число вершин многогранника, оно может принимать значение 4 или 5. Рассмотрим эти случаи отдельно.

а) $B=5$. По формуле Эйлера $P - \Gamma = 3$. Подставив $\Gamma=5$, получим $P=8$.

Итак, мы получили $B=\Gamma=5$ и $P=8$. Такой многогранник существует, например четырехугольная пирамида.

б) $B=4$. Подставив $B=4$ и $\Gamma=5$ в формулу Эйлера, получим, $P=7$, но по условию $P \geq 8$. Следовательно, решением задачи будет только $B=5$, $P=8$.

48. Из формулы Эйлера получим $6B - 6P + 6\Gamma = 12$. Подставив $6B \leq 4P$, $2P = 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \dots$ и $\Gamma = \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \dots$, получим: $4P - 4P - (3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \dots) + 6(\Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \dots) \geq 12$, или $3\Gamma_3 + 2\Gamma_4 + \Gamma_5 \geq 12$. Так как по условию задачи $\Gamma_4 = \Gamma_5 = 0$, получим $3\Gamma_3 \geq 12$, откуда $\Gamma_3 \geq 4$.

49. Применим метод доказательства от противного. Предположим, что существует такой простой многогранник, который соответствует условию задачи. Тогда

$$2P = 3\Gamma_3 + 5\Gamma_5 + 7\Gamma_7 + \dots = (\Gamma_3 + \Gamma_5 + \Gamma_7 + \dots) + 2(\Gamma_3 + 2\Gamma_5 + 3\Gamma_7 + \dots).$$

Пришли к противоречию, так как $\Gamma_3 + \Gamma_5 + \Gamma_7$ — число нечетное, а $2(\Gamma_3 + 2\Gamma_5 + \dots)$ — число четное, то их сумма должна быть нечетна, но $2P$ — четное число.

50. См. решение задачи 49.

51. Действительно, равенство $2P = 3B_3 + 4B_4 + 5B_5 + \dots$ можно записать иначе $2P = (B_3 + B_5 + B_7 + \dots) + 2(B_3 + 2B_4 + 2B_5 + \dots)$. Откуда следует, что $B_3 + B_5 + B_7 + \dots$ — четное число.

52. Предположим, что существует простой многогранник, у которого число ребер меньше 6 ($P \leq 5$). Так как для любого простого многогранника имеет место $3B \leq 2P$, то $B \leq \frac{2 \cdot 5}{3}$, или $B \leq 3\frac{1}{3}$. Получили противоречие: число вершин этого многогранника $B \leq 3$, что невозможно, так как для любого простого многогранника $B \geq 4$.

53. Предположим, что существует многогранник, который имеет $P=7$ ребер. Найдем число его вершин: $3V \leq 2 \cdot 7$, $V \leq 4\frac{2}{3}$, откуда $V \leq 4$ (натуральное число). По формуле Эйлера найдем: $\Gamma = 2 + 7 - 4 = 5$. Так как каждая грань имеет не меньше трех сторон, то $3\Gamma \leq 2P$, но, $3 \cdot 5 \leq 2 \cdot 7$. Полученное противоречие доказывает что, $P \neq 7$.

54. См. решение задачи 43.

$3\Gamma \leq 2P$ и $3\Gamma \geq P+6$, откуда получим $\frac{3}{2} \leq \frac{P}{\Gamma}$, $3\Gamma > P$ или $\frac{P}{\Gamma} < 3$.

Следовательно, $\frac{3}{2} \leq \frac{P}{\Gamma} < 3$.

55. См. решение задачи 44, а).

56. Нельзя.

57. При топологических преобразованиях изменяется площадь квадрата, величины углов, прямолинейность ребер и т. д. Инвариантами являются непрерывность контура квадрата, эйлера характеристика ($V - P + \Gamma = 2$), не возникает самопересечений контура квадрата и т. д. Квадрат похож на окружность больше, чем на кольцо, так как окружность и квадрат являются гомеоморфными фигурами (топологически одинаковыми), а квадрат и окружность не гомеоморфны кольцу.

58. а гомеоморфно б, в гомеоморфно г.

59. Буквы О и Ж гомеоморфных не имеют.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

3

1. УНИКУРСАЛЬНЫЕ ФИГУРЫ

3

2. «ГЕОМЕТРИЯ НИТЕЙ»

9

3. ЛАБИРИНТЫ

12

4. ЧТО ТАКОЕ ГРАФ

20

5. СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

24

6. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

28

7. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА О ПЛОСКОМ ГРАФЕ

32

8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ГРАФОВ

43

78

9. ПРОБЛЕМА РАСКРАСКИ КАРТЫ
50

10. МНОГОГРАННИКИ
59

11. НА ПОДСТУПАХ К ТОПОЛОГИИ
63

ЗАКЛЮЧЕНИЕ
71

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ
73

АНАТОЛИЙ АГАДЖАНОВИЧ САРГИСЯН
ЮРИЙ МИХАЙЛОВИЧ КОЛЯГИН

ПОЗНАКОМЬТЕСЬ
С ТОПОЛОГИЕЙ
(на подступах к топологии)

Редактор *Л. М. Котова*
Художник обложки *Б. Н. Юдкин*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технические редакторы *В. Ф. Коскина,*
С. Н. Филатова
Корректор *К. П. Лосева*

Сдано в набор 10/III 1976 г. Подписано
к печати 7/X 1976 г. 84×108¹/₃₂. Бума-
га сыктывкарская № 1. Печ. л. 2,5. Ус-
лов. л. 4,2. Уч.-изд. л. 3,82. Тираж
80 тыс. экз. А05768. Заказ № 3069.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Просвещение»
Государственного Комитета
Совета Министров РСФСР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Полиграфический комбинат им. Я. Ко-
ласа Государственного комитета Совета
Министров Белорусской ССР по делам
издательств, полиграфии и книжной
торговли. Минск, Красная, 23.

Цена 11 коп.

11 коп.

